

Darstellung des Geopotentials der 500 mb-Fläche
der winterlichen Nordhalbkugel durch natürliche
Orthogonalfunktionen

von

HEINZ FECHNER

DOI 10.3289/IFM_BER_5

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	
Abstract (Zusammenfassung in Englisch)	
1. Einleitung	1
2. Die Definition der natürlichen Orthogonal- funktionen durch eine Extremalbedingung	2
3. Folgerungen aus der Extremalbedingung	4
4. Die Daten	7
5. Die Berechnung der natürlichen Orthogonalfunktionen	8
6. Die Folge der Eigenwerte und der Standardabweichungen	13
7. Die einzelnen natürlichen Orthogonalfunktionen des Geopotentials der 500 mb-Fläche im Winter und ihre Spektralzerlegung durch Kugelflächen- funktionen	16
8. Filtern von aktuellen Feldern mit natürlichen Orthogonalfunktionen	22
9. Abhängigkeiten der natürlichen Orthogonal- funktionen von der Land-Meer-Verteilung und den extraterrestrischen Strahlungsparametern	23
10. Die zeitabhängigen Koeffizienten der natürlichen Orthogonalfunktionen	29
11. Ein klimatologisches Windfeld, abgeleitet aus der ersten natürlichen Orthogonalfunktion	31
12. Weitere Anwendungsmöglichkeiten dieser Funktionen und Ausblick	33
13. Danksagung	35
Literaturverzeichnis	36
Tabellen	1-24
Abbildungen	1-43

werden für die Zeit vom November 67 bis Januar 68 dargestellt. Diese Koeffizienten sind objektive und optimale Zirkulationsparameter. Schließlich wird ein Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeit gegeben und berichtet, wie diese Untersuchung auf alle Jahreszeiten ausgedehnt werden soll.

Abstract

The height of the 500 mb surface of the Northern Hemisphere for the winter is expanded in horizontal Empirical Orthogonal Functions. To reduce the amount of data, every day's height field was expanded in surface-spherical harmonics. Only those harmonics were used which are symmetric to the equator and which have a great circle wave number $n \leq 12$ and a zonal wave number $|m| \leq 9$. With this truncation each field has 79 numbers of freedom. Hence, 79 Orthogonal Functions can be computed. It will be demonstrated by the presentation of their variances and of the standard deviation of their truncated series that only the first 22 to 27 Orthogonal Functions have a significant meteorological meaning. The standard deviation has the value of 33 gpm when truncating the series after the 22nd mode. The first 19 Orthogonal Functions are represented by contour lines on circumpolar charts until 30°N and by the distribution of energy of the different spheric surface waves. The energy spectra of the first 16 Orthogonal Functions were listed as a function of wave numbers. It is shown by an example how to use the empirical Orthogonal Functions to filter out the meteorologically unimportant or incorrect noise. The most important empirical Orthogonal Functions were correlated with the land-sea distribution, the orography and the radiation parameters at the upper boundary of the atmosphere. A primitive climatological wind field was calculated from the first empirical Orthogonal Function. The time-depending coefficients of the most important empirical Functions are shown for the time from November 67 until January 68.

These coefficients are objective and optimal circulation parameters. In the last chapters it is reported how these functions can be used further and how this investigation will be extended to all seasons.

1. Einleitung

Will man die meteorologischen Erfahrungen, die uns die jahre-
langen Routinemessungen geliefert haben, in komprimierter
Form objektiv darstellen, so eignen sich dafür die natürlichen
Orthogonalfunktionen. Ihre allgemeine Definition, ihre
Eigenschaften und die Methode, um sie zu berechnen, ist aus-
führlich von LORENZ [1] geschildert worden. Doch bezog
sich seine Anwendung auf die vertikalen Zusammenhänge der
Atmosphäre. BRADLEY und WIIN-NIELSEN [2] haben die vertikalen
Orthogonalfunktionen für die Darstellung meridionaler
Zusammenhänge verwendet. CRADDOCK und FLOOD [3] haben diese
Methode nur auf die Zusammenhänge in der horizontalen 500 mb-
Fläche angewendet. Die hier vorgelegte Arbeit unterscheidet
sich von der letzteren in erster Linie durch das untersuchte
Gebiet und die Art der Datendarstellungen, die den
natürlichen Orthogonalfunktionen zugrunde liegen. Während
CRADDOCK und FLOOD [3] Daten an festen Gitterpunkten verwenden
die auf der Nordhalbkugel nicht überall gleichmäßig verteilt
sind, werden in der hier vorgelegten Arbeit die Horizontal-
felder durch Kugelflächenfunktionsreihen dargestellt.
Dabei werden nur die zum Äquator spiegelbildlich liegenden
Funktionen verwendet, womit eine Darstellung der vollständigen
Nordhalbkugel gewährleistet ist, wenn auch mit einer gewissen
Verzerrung infolge der Spiegelung, speziell in Äquatornähe.
Ferner unterscheidet sich die vorgelegte Arbeit von der oben
zitierten dadurch, daß in dieser Arbeit hier nur die
Verhältnisse im Winter untersucht werden; dadurch
erhält man im wesentlichen nur die

wetterwirksamen Anteile, während der Jahresgang, der bei CRADDOCK und Flood [3] die größten Schwankungen liefert, in der vorgelegten Arbeit kaum von Einfluß ist. Die natürlichen oder empirischen Orthogonalfunktionen sind reine Funktionen des geographischen Ortes. Man erhält sie als Eigenfunktionen der Kovarianzmatrix der Meßwerte an den verschiedenen geographischen Punkten. Da diese Funktionen ausschließlich durch die Meßwerte geprägt werden, sind es natürliche Funktionen. Die Orthogonalität bedeutet, daß je zwei verschiedene Funktionen voneinander unabhängige meteorologische Information enthalten.

2. Die Definition der natürlichen Orthogonalfunktionen durch eine Extremalbedingung

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden zwei Mittelungsdefinitionen eingeführt. Ist $\Phi(\phi, \lambda, t)$ eine beliebige von der geographischen Breite ϕ , der geographischen Länge λ und der Zeit t abhängige Größe, so stellt der Querstrich unter Fortlassung der Argumente ϕ und λ das Flächenmittel über die Nordhalbkugel dar:

$$\overline{\Phi(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi(\phi, \lambda, t) \cos \phi \, d\phi \, d\lambda \quad (1)$$

Ist Δt ein bestimmter Zeitraum, der nicht notwendigerweise zusammenhängend sein muß, und $m(\Delta t)$ sein Maß, so stellt ein Dach unter Fortlassung des Argumentes t , das Mittel über diesen Zeitraum dar:

$$\widehat{\Phi(\phi, \lambda)} = \frac{1}{m(\Delta t)} \int_{\Delta t} \Phi(\phi, \lambda, t) \, dt \quad (2)$$

Fehlt rechts in der Formel (1) das Argument t der Funktion Φ , so wird es auch links weggelassen, fehlen rechts in der Formel (2) die Argumente ϕ und λ , so fallen sie auch links fort.

Jetzt sei $\Phi(\phi, \lambda, t)$ unser gemessenes Feld, also das Geopotential der 500 mb-Fläche. Dies Feld soll durch eine Reihe dargestellt werden, deren Summanden aus zwei Faktoren bestehen, von denen der eine nur vom Ort und der andere nur von der Zeit abhängen:

$$\Phi(\phi, \lambda, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \cdot P_i(\phi, \lambda). \quad (3)$$

$P_i(\phi, \lambda)$ heißt die i -te natürliche Orthogonalfunktion und $c_i(t)$ ihr Koeffizient, falls die Reihenglieder die nachfolgende Extremalbedingung (6) und die $c_i(t)$ noch zusätzlich die Normierungsbedingung (7) erfüllen. Die Teilreihe

$$\Phi_n(\phi, \lambda, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \cdot P_i(\phi, \lambda) \quad 1 \leq n < N \quad (4)$$

hat den Fehler

$$f_n(\phi, \lambda, t) = \Phi(\phi, \lambda, t) - \Phi_n(\phi, \lambda, t) = \Phi(\phi, \lambda, t) - \sum_{i=1}^n c_i(t) P_i(\phi, \lambda) \quad (5)$$

Das über Raum und Zeit gemittelte Fehlerquadrat soll nun für $n = 1, 2, \dots, N-1$ stets ein absolutes Minimum bilden:

$$\overset{\Delta}{f_n^2} = f_n^2 = \text{Minimum für } n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$

Die $c_i(t)$ sollen auf 1 normiert sein:

$$\overset{\wedge}{c_i^2} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

3. Folgerungen aus der Extremalbedingung

Aus der nach Formel (6) notwendigen Bedingung, daß F_n^2 ein relatives Extremum ist, folgt nach den Regeln der Variationsrechnung

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left[\overline{f_n^2(t)} \right] = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_i} \left[\overline{f_n^2(\phi, \lambda)} \right] = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (9),$$

weil sowohl die $c_i(t)$ als auch die $P_i(\phi, \lambda)$ variiert werden müssen. Die Gleichungen (8) und (9) müssen zuerst für $n=1$, danach für $n=2$ und sofort bis $n=N-1$ angewendet werden. Zunächst sei $n=1$. Aus (8) erhält man unter Verwendung von (5)

$$c_1(t) = \frac{1}{w_1^2} \overline{\phi(t) \cdot P_1} \quad (10)$$

$$\text{mit der Abkürzung } w_1^2 = \overline{P_1^2} \quad (11)$$

Aus (9) erhält man analog, aber unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung (7)

$$P_1(\phi, \lambda) = \overline{\phi(\phi, \lambda) \cdot c_1} \quad (12)$$

(10) in (12) eingesetzt, ergibt eine Integralgleichung mit einer unbekannten Funktion $P_1(\phi, \lambda)$:

$$\overline{\phi(\phi, \lambda) \phi \cdot P_1} = w_1^2 \cdot P_1(\phi, \lambda). \quad (13)$$

Nun wird weiter unten gezeigt, daß man die Beziehungen (10), (12) und (13) auf die Indices $i=2, \dots, N$ ausdehnen kann, wobei sich ergibt, daß sowohl die $c_i(t)$ als auch die Punkte $P_i(\phi, \lambda)$

orthogonal sind:

$$\widehat{c_i c_k} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases} \quad (14)$$

$$\overline{P_i P_k} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ w_i^2 & \text{für } i = k. \end{cases} \quad (15)$$

Die Größen w_i^2 stellen dabei zunächst nur Abkürzungen für die Zahlenwerte der durch (15) gegebenen bestimmten Integrale dar. Desweiteren wird also behauptet, daß folgende Formeln gelten

$$P_i(\phi, \lambda) = \widehat{\phi(\phi, \lambda) c_i} \quad (16)$$

und

$$c_i(t) = \frac{1}{w_i^2} \overline{\phi(t) P_i}. \quad (17)$$

Daraus folgt sofort

$$\widehat{\phi(\phi, \lambda) \overline{\phi P_i}} = w_i^2 P_i(\phi, \lambda). \quad (18)$$

Nun zum Beweis der Formeln (14) bis (17):

Seien also die Gleichungen (14) bis (18) für $i=n-1, n \geq 2$ bereits bewiesen. Dann folgt aus der Extremalbedingung (8) zunächst

$$\overline{\phi(t) P_i} = \sum_{k=1}^n c_k(t) \overline{P_i P_k} \quad (19)$$

und wegen der Induktionsvoraussetzung (15) erhält man daraus für $i < n$

$$\overline{\phi(t) P_i} = c_i(t) w_i^2 + c_n(t) \overline{P_i P_n}$$

und daraus in Verbindung mit (17)

$$c_n(t) \overline{P_i P_n} = 0$$

Da die Funktion $c_n(t)$ wegen (7) nicht identisch verschwinden kann, ist die Orthogonalitätsrelation (15) auch für $i=n$ bewiesen. Unter Verwendung dieser Orthogonalitätsrelation erhält man für $i=n$ aus (19) die Formel (17). Ganz analog leitet man aus der Minimalbedingung (9), die Orthogonalität (14) der $c_i(t)$ und die Beziehung (16) für $i=n$ ab. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen und die Formeln (14) bis (18) sind für $i=1, \dots, N$ bewiesen. Für den Wert des integrierten Fehlerquadrats F_n^2 erhält man aus (6) und (5) unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation (14) und (15)

$$F_n^2 = \sum_{i=n+1}^N w_i^2 = F_0^2 - \sum_{i=1}^n w_i^2, \quad (20)$$

wobei $F_0^2 = \overline{\Phi^2}$ das Raum- und Zeitmittel von $\Phi^2(\phi, \lambda, t)$ ist.

Es war für F_n^2 nicht nur ein relatives, sondern sogar ein absolutes Minimum gefordert worden. Das bedeutet, wie man der rechten Seite von (20) entnimmt, ein Maximum für w_n^2 , gegenüber allen noch nicht festgelegten Werten w_i^2 . Die Menge aller w_i^2 sind ja als Eigenwerte der Integralgleichung (18) festgelegt. Wegen der oben angestellten Überlegung müssen die w_i^2 mit wachsendem Index abnehmen:

$$w_1^2 \geq \dots \geq w_i^2 \geq w_{i+1}^2 \geq \dots \geq w_N^2 \quad (21)$$

$P_i(\phi, \lambda)$ ist die zu dem Eigenwert w_i^2 gehörende Eigenfunktion, deren Normierung durch (15) gegeben ist. Damit sind die natürlichen Orthogonalfunktionen $P_i(\phi, \lambda)$ bei voneinander verschiedenen Eigenwerten, die man voraussetzen kann, bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Auf die Wahl des Vorzeichens werde ich bei der konkreten Berechnung der Eigenwerte und der Eigenfunktionen im Abschnitt 5 noch einmal zurückkommen.

Doch zunächst soll auf das verwendete Datenmaterial eingegangen werden.

4. Die Daten

Ausgangsdaten waren die Maschinenanalysen des Deutschen Wetterdienstes, die vom DWD auch als Eingangsdaten für die Vorhersagemodelle benutzt wurden. Die Untersuchung erstreckte sich zunächst nur auf die drei Wintermonate Dezember, Januar und Februar. Für die Berechnung der $P_1(\phi, \lambda)$ wurden die entsprechenden Winterdaten der Jahre 1966/67 bis 1971/72 verwendet; dabei wird angenommen, daß die fünf verwendeten Jahre für das allgemeine Wettergeschehen typisch sind. Da die hemisphärische Wetterlage zeitlich eine gewisse Erhaltungsneigung zeigt, das heißt, die Wittersituation von einem Termin ist mit dem nächsten Termin korreliert, wurde es zunächst für nicht erforderlich gehalten, jeden Termin heranzuziehen. Es wurde abwechselnd jeder dritte bzw. jeder vierte Termin verwendet; das entspricht einem mittleren Zeitabstand von $1\frac{3}{4}$ Tagen, da die Originalmeßsysteme einen zwölfstündigen Abstand haben. Insgesamt sind 334 Termine für die Berechnung der natürlichen Orthogonalfunktionen herangezogen worden. Um den Einfluß der Terminauswahl abzuschätzen, war zunächst nur jeder siebte Termin verwendet worden und anschließend jeder dazwischen liegende Termin. Der Vergleich brachte beträchtliche Unterschiede der Orthogonalfunktion, so daß in dieser Untersuchung beide Datensätze verwendet wurden und eine entsprechende Untersuchung mit 12-stündigen Daten - also allen Terminen - geplant ist.

Die Daten des DWD lagen auf einem rechteckigen Gitternetz vor, das sich in Form eines Achtecks über die Nordhalbkugel erstreckt und im Süden maximal bis 49°N sowie minimal bis 45°N reicht. Dies Gitternetz hat in x- und in y-Richtung maximal 54 Punkte und besteht insgesamt aus 2404 mit Daten belegten Gitterpunkten. Die Berechnung der orthogonalen Funktionen erfordert die Bildung einer Kovarianzmatrix zwischen allen Gitterpunkten, von der dann die Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen sind. Diese Kovarianzmatrix hätte bei Verwendung der Originaldaten 2404×2404 Elemente. Das ist auch für einen modernen Elektronenrechner zu viel. Aus diesem Grunde muß zunächst die Anzahl der Originaldaten eines Termins kräftig reduziert werden. Das geschieht ja durch ihre Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen.

5. Die Berechnung der natürlichen Orthogonalfunktionen

Um die Anzahl der Daten pro Termin zu reduzieren, werden sie nach Kugelflächenfunktionen $Y_k(\phi, \lambda)$ entwickelt. Die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenfunktionen des Laplace-Operators Δ auf der Kugeloberfläche:

$$\Delta Y_k(\phi, \lambda) = -n(n+1)Y_k(\phi, \lambda).$$

Die Großkreiswellenzahl n ist eine gewisse Funktion des Index k . Die Kugelflächenfunktionen sind auf 1 normiert und selbstverständlich orthogonal.

$$\overline{Y_k Y_j} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ 1 & \text{für } k = j \end{cases} \quad (22).$$

Außerdem werden nur diejenigen Eigenfunktionen verwendet, die zum Äquator symmetrisch sind:

$$Y_k(\phi, \lambda) = Y_k(-\phi, \lambda)$$

Im einzelnen erhält man:

$$Y_1(\phi, \lambda) = 1; \quad Y_2(\phi, \lambda) = -\sqrt{3} \cos \phi \sin \lambda;$$

$$Y_3(\phi, \lambda) = \sqrt{3} \cos \phi \cos \lambda;$$

$$Y_4(\phi, \lambda) = \sqrt{5} \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \phi \right); \quad Y_5(\phi, \lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{15} \cos^2 \phi \sin 2\lambda;$$

weitere Einzelheiten über die Kugelflächenfunktion findet man bei FECHNER [4].

Es würden alle Kugelflächenfunktionen verwendet, für die $n \leq 12$ und die zonale Wellenzahl $|m| \leq 9$ war. Man erhält dann $N=79$ Funktionen. Die Geopotentialfunktion für den Termin t sollte durch eine Reihe mit diesen Funktionen dargestellt werden:

$$\Phi_t(\phi, \lambda) = \sum_{k=1}^N b_{k,t} Y_k(\phi, \lambda) \quad (23)$$

Es galt, die Koeffizienten $b_{k,t}$ aus den gegebenen Geopotentialwerten

$\Phi_{x,y,t}$ an den Gitterpunkten x und y zu berechnen.

Das wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt:

$$\sum_{x,y} \left[\Phi_t(\phi_{x,y}, \lambda_{x,y}) - \Phi_{x,y,t} \right]^2 = \text{Minimum} \quad (24)$$

Darin sind die $\phi_{x,y}$ und die $\lambda_{x,y}$ die geographischen Koordinaten des Gitterpunktes (x,y) ; es wird über alle Gitterpunkte summiert. Setzt man in (24) die Reihe (23) ein, so lassen sich die $b_k(t)$ nach dem üblichen Verfahren berechnen. Das entsprechende Rechenprogramm wurde von K. ARPE [5] entwickelt.

Da die Daten an diskreten Terminen vorlagen, muß das Integral über die Zeit in (2) durch eine Summe ersetzt werden. Der Einfachheit halber ist der Index über die einzelnen Termine wieder mit t bezeichnet; er läuft von $t=1$ bis $t=T=334$. Dann erhält man anstelle von (2) für das zeitliche Mittel

$$\overline{\phi(\phi, \lambda)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \phi_t(\phi, \lambda) \quad (25)$$

Unter Verwendung der Kugelflächenfunktionsreihe (23) sowie der Beziehungen (22) und (25) geht die Integralgleichung (18) zur Berechnung der natürlichen Orthogonalfunktionen in eine Matrixengleichung über. Zu diesem Zweck werden die natürlichen Orthogonalfunktionen auch nach den Kugelflächenfunktionen entwickelt

$$P_i(\phi, \lambda) = \sum_{j=1}^N p_{j,i} Y_j(\phi, \lambda) \quad (26)$$

Für die linke Seite von (18) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[b_{k,t} Y_k(\phi, \lambda) \sum_{j=1}^N (b_{j,t} p_{j,i}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T b_{k,t} b_{j,t} p_{j,i} Y_k(\phi, \lambda) \end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$w_i^2 p_{k,i} y_k(\phi, \lambda).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $y_k(\phi, \lambda)$ müssen die Faktoren dieser Funktionen auf beiden Seiten übereinstimmen. Außerdem kann man die Kovarianzen der $b_{k,t}$ zu einer symmetrischen Matrix $(a_{i,k})$ zusammenfassen:

$$a_{k,i} = a_{i,k} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T b_{i,t} b_{k,t} \quad (27)$$

Damit geht (18) endgültig in die Matrizengleichung

$$\sum_{j=1}^N a_{j,k} p_{j,i} = w_i^2 p_{k,i} \quad (i, k = 1, \dots, N) \quad (28)$$

über. Für die $p_{i,j}$ gilt nach (15) die Normierung

$$\overline{p_i^2} = \sum_{j=1}^N p_{j,i}^2 = w_i^2.$$

Die Vektoren $q_{j,i} = \frac{1}{w_i} p_{j,i}$ (29)

sind dann auf 1 normiert: $\sum_{j=1}^N q_{j,i}^2 = 1$ (30)

und aus (28) erhält man das Eigenvektorproblem

$$\sum_{j=1}^N a_{k,j} q_{j,i} = w_i^2 q_{k,i} \quad (31)$$

mit der Normierung (30) und der Anordnung (21) der Eigenwerte w_i^2 .

Dieses Problem wurde nach dem JACOBISchen Verfahren gelöst, wie es bei RALSTON und WILF [6] angegeben ist. Um die Eigenwerte w_i^2 nach der Größe zu ordnen, wurde der Teilschritt, mit dem ein außerhalb der Hauptdiagonalen stehendes Element der Matrix $(a_{i,k})$ zum Verschwinden gebracht wird, abgeändert. Und zwar so, daß anschließend für die beiden neuen Hauptdiagonalglieder a_{ii} und a_{kk} die Beziehung $a'_{ii} \geq a'_{kk}$ für $i < k$ gilt. Denn es ist ja $w_i^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} a_{i,i}^{(r)}$ und entsprechend für k . Wir betrachten einen Einzelschritt für zwei Indices i und k mit $i < k$ und $q_{ii} = \cos \theta$; $q_{kk} = \cos \theta$; $q_{ik} = -q_{ki} = \sin \theta$.

Man erhält

$$a'_{ii} = a_{ii} \cos^2 \theta + a_{kk} \sin^2 \theta - 2 a_{ik} \sin \theta \cos \theta$$

$$a'_{kk} = a_{ii} \sin^2 \theta + a_{kk} \cos^2 \theta + 2 a_{ik} \sin \theta \cos \theta$$

$$a'_{ik} = (a_{ii} - a_{kk}) \sin \theta \cos \theta + a_{ik} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

Setzt man

$$W = \frac{a_{ii} - a_{kk}}{2 \sqrt{(a_{ii} - a_{kk})^2 + 4 a_{ik}^2}},$$

so erfüllt

$$\sin \theta = \epsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2} - W}$$

$$\text{und } \cos \theta = \epsilon_2 \sqrt{\frac{1}{2} + W}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{mit } \epsilon_i^2 = 1 \text{ und} \\ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } a_{ik} < 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \end{array} \right.$$

neben den obigen Gleichungen auch noch die Bedingung

$$a'_{ii} - a'_{kk} \geq 0.$$

Die ϵ_i wurden so bestimmt, daß $\epsilon_2 = +1$ für $w > 0$ oder $a_{ik} < 0$; damit hat θ folgenden Wertebereich

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{3}{4} \pi$$

Diese Entscheidungen für den Elementarschritt beeinflußt das Vorzeichen der natürlichen Orthogonalfunktionen. Insbesondere ist der Mittelwert der ersten Funktion positiv.

Hat man die Eigenwerte w_i^2 und die normierten Eigenvektoren q_{jk} berechnet, so erhält man die p_{jk} aus (29), und die natürlichen Orthogonalfunktionen werden durch (26) gegeben. Eine Formel zur tatsächlichen Berechnung des Koeffizienten der i -ten natürlichen Orthogonalfunktion $P_i(\phi, \lambda)$ in der Reihe (3) des Terms t erhält man durch Umschreiben der Formel (17) in die Komponentenschreibweise nach Formel (23) unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen gemäß Formel (22):

$$c_{it} = \frac{1}{w_i^2} \sum_{k=1}^N b_{k,t} P_{k,i} \quad (32)$$

6. Die Folge der Eigenwerte und der Standardabweichungen

Zunächst sollen die Eigenwerte w_i^2 , also die Gewichte der natürlichen Orthogonalfunktionen betrachtet werden. Ihre Zahlenwerte in gpm^2 findet man in der Tabelle 1 in der zweiten Spalte. Der extrem große Eigenwert der ersten natürlichen Orthogonalfunktion bringt die überragende Bedeutung der ersten natürlichen Funktion zum Ausdruck, die im wesentlichen die zeitlich gemittelte Höhe der 500 mb-Fläche wiedergibt. Da dabei die absoluten Werte eingehen, drückt dieses Ergebnis aus, daß die zeitlichen

Schwankungen des Geopotentials gegenüber ihren absoluten Werten sehr klein sind. Bei den übrigen Gewichten, ab $i = 2$, erkennt man zunächst einen großen Sprung zwischen $i=2$ und $i=3$. Das zeigt, daß die 2. natürliche Funktion ebenfalls eine herausragende Bedeutung besitzt. Besonders deutlich ist dies an der Abbildung 1 zu erkennen. Dort sind die Gewichte als Funktion ihrer Ordnungsnummer in logarithmischer Darstellung aufgetragen. Sieht man von dem Wert für w_2^2 ab, so liegen die Werte in guter Näherung auf einer Geraden. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der Anstieg im Abschnitt bis etwa $i=22$ steiler verläuft als für die höheren Werte von i . Man erhält im einzelnen

$$w_i^2 \approx 880 \cdot e^{-0,107 \cdot i} = 880 \cdot (1-0,1025)^i \quad \text{für } 2 < i \leq 22$$

$$\text{und } w_i^2 \approx 443 \cdot e^{-0,0756 \cdot i} = 443 (1-0,0729)^i \quad \text{für } 22 < i \leq 79$$

Der Abstieg der Kurve der w_i^2 für die höheren Ordnungsnummern ist also rund nur dreiviertel so steil wie derjenige der niedrigeren Ordnungsnummern. Ohne eine exakte Begründung dafür geben zu können, möchte ich mich der folgenden Behauptung von CRADDOCK und FLOOD [3] anschließen: Innerhalb des meteorologischen Lärms bilden die Eigenwerte eine geometrische Reihe. Danach müßten die Eigenvektoren mit einer Ordnungszahl größer als 22 keine vernünftige meteorologische Aussage mehr darstellen. CRADDOCK und FLOOD [3] meinen, daß bei ihnen diese Grenze zwischen 20 und 46 liege. Wegen des großen Sprunges hinter $i=27$, läßt sich diese Grenze bei mir eventuell auch bis dorthin verschieben. In Bezug auf die Stärke der geometrischen Progression zeigen meine Eigenwerte bis zur Ordnungszahl $i=22$ eine gute Überein-

stimmung mit denen von CRADDOCK und FLOOD [3]. Für die größeren Ordnungszahlen bei CRADDOCK und FLOOD [3], speziell für $i > 46$, ist ihr Abfall nur etwa halb so stark wie der in meiner Untersuchung; das ist offensichtlich eine Folge davon, daß ihre maximale Ordnung bis $i=130$ geht, während meine bereits bei $i=79$ endet.

Welche Auswirkungen die Gewichte, also die Eigenwerte, auf den Fehler, der nach dem i -ten Reihenglied abgebrochenen Teilreihe haben, kann man an der dritten Spalte der Tabelle 1 ablesen. Dort ist jeweils der mittlere quadratische Fehler in gpm angegeben. Bei $i=0$ steht dort jedoch statt des Fehlers der Mittelwert über Raum und Zeit. Er liegt um 34 gpm über dem Wert der US-Standardatmosphäre. Brechen wir bereits nach dem ersten Glied ab, so beträgt der dadurch entstehende mittlere Fehler ca. 87 gpm, bei Abbruch nach dem 22sten Glied beträgt der mittlere Fehler ca. 33 gpm, das sind 37% von dem Fehler, der bei Abbruch nach dem ersten Glied übrigblieb (Spalte 4). Für die $i=27$ erhalten wir einen Fehler von 27 gpm oder 30%. Da die Hinzunahme weiterer Reihenglieder im wesentlichen nur noch meteorologischen Lärm liefert, kann man daraus den Schluß ziehen, daß unsere derzeitige Kenntnis der aktuellen Höhe der 500 mb-Fläche im Mittel über die Nordhalbkugel mit einem Fehler von rund 30 gpm behaftet ist. CRADDOCK und FLOOD [3] haben gezeigt, daß daran die datenarmen Gebiete des Pazifik einen wesentlichen Anteil haben; außerdem natürlich die Tropen, die in dieser Untersuchung bis zum Äquator miterfaßt sind. In den übrigen Gebieten kann die Genauigkeit entsprechend höher sein, doch für Betrachtungen der hemisphärischen Zirkulation

muß man diese Mittelwerte zugrunde legen. Eine Genauigkeit von 10 gpm erreicht man erst mit ca. 50 Reihengliedern. Formal günstigere Ergebnisse erzielt man, falls anstelle des mittleren Fehlers, sein Quadrat, also die Varianz, dargestellt wird. In Spalte 5 ist sie in Prozent, bezogen auf ihren Wert bei Abbruch nach dem ersten Glied, dargestellt. 50% werden mit fast 7 Gliedern und 10% mit 26 Reihengliedern erreicht. In der letzten Spalte sind die Eigenwerte in Prozent relativ zu der Varianz für $i=1$ angegeben. Diese Zahlen zeigen an, um wieviel Prozent die Varianz, und dadurch der Fehler durch jedes neu hinzukommende Glied jeweils vermindert wird. Hier erkennt man noch einmal deutlich, daß auch das zweite Glied einen Beitrag liefert, der aus der Folge der übrigen nachfolgenden Glieder herausfällt. Der Beitrag der Glieder oberhalb der Ordnungsnummer 23 liegt unter 1%.

7. Die einzelnen natürlichen Orthogonalfunktionen des Geopotentials der 500 mb-Fläche im Winter und ihre Spektralzerlegung nach Kugelflächenfunktionen

Die natürlichen Orthogonalfunktionen werden graphisch durch ihre Isohypsen auf einer stereographischen Projektion präsentiert. Diese Bilder erstrecken sich im Süden nur bis 30°N , obwohl die Funktionen bis zum Äquator definiert sind. Dies geschah, weil 1. in dem dargestellten Gebiet die wesentlichen zeitlichen und geographischen Änderungen auftreten, 2. weil dieses Gebiet uns besonders interessiert und 3. weil die Analysen des DWD, auf die sich diese Untersuchung stützt, in nördlicheren Gebieten wegen der größeren Stationsdichte eine höhere Genauigkeit aufweisen.

Die Orthogonalfunktionen werden nach der Formel (26) spektral durch die Kugelflächenfunktionskoeffizienten $p_{j,i}$ dargestellt. deren Quadrate in den Tabellen 2 bis 21 wiedergegeben werden. Die erste natürliche Orthogonalfunktion $P_1(\phi, \lambda)$ stellt nahezu das klimatologische Mittel dar; exakt wäre dies der Fall, wenn der räumlich über die Nordhalbkugel gebildete Mittelwert zeitlich konstant bliebe. Diese Funktion $P_1(\phi, \lambda)$ (Abb. 2) steht in guter Übereinstimmung mit der SCHERHAGSchen [7] Mittelkarte für den Januar. Die Tabelle 2 zeigt, welche Größe die einzelnen Kugelflächenfunktionskoeffizienten haben. Der Wert bei $n=0$ ist der räumliche Mittelwert über die Nordhalbkugel. Größenmäßig an zweiter Stelle steht der Koeffizient von $n=2$ und $m=0$. Die dazugehörige Kugelflächenfunktion $Y_4(\phi, \lambda)$ hängt nur von der geographischen Breite ab, hat am Pol den maximalen Wert $\sqrt{5}$, bei $35^\circ N$ die Nullstelle und am Äquator den minimalen Wert $-\frac{1}{2} \sqrt{5}$. Daraus erhält man für die größte stehende Geopotentialwelle am Äquator den maximalen Wert von 274 gpm und am Nordpol der kleinste Wert von -567 gpm; jeweils gegenüber dem räumlichen Mittel. Die unterschiedlichen Absolutwerte der Amplituden zwischen Nordpol und Äquator hängen mit der Geometrie der Erde zusammen. In den drei untersten Zeilen der Tabelle 2 ist das Energiespektrum, bezogen auf die Gesamtwellenzahl n angegeben, oben als Amplitudenquadrat, dann als Gesamtenergie der Nordhalbkugel und in der letzten Zeile in Prozenten. In den drei mit Quadratsumme überschriebenen Spalten ist das Energiespektrum, bezogen auf die zonalen Wellenzahlen m in den entsprechenden Größen eingetragen. Hier fällt der starke Abfall von 24% auf rund 3% hinter der zonalen Wellenzahl 3 auf.

Die zweite Orthogonalfunktion $P_2(\phi, \lambda)$ findet man auf der Abbildung 3. Sie stellt die geographische Verteilung der stärksten Anomalie des Geopotentials für die Nordhalbkugel im Winter dar. Wenn über Südkandinavien die 500 mb-Fläche 80 gpm unter das klimatologische Wintermittel sinkt, steigt sie zum gleichen Termin sowohl südlich Grönlands als auch an der Lena-Mündung im statistischen Mittel um 120 gpm oder umgekehrt. In $P_2(\phi, \lambda)$ dominiert die zonale Wellenzahl 2, wie man aus der Tabelle 3 ihrer Spektralzerlegung ablesen kann. Dort und in den folgenden Tabellen bis Nr. 18 sind die über die Hemisphäre gemittelten Amplitudenquadrate der räumlichen Wellen mit der zonalen Wellenzahl m und der Großkreiswellenzahl n angegeben.

Die folgenden natürlichen Orthogonalfunktionen sind bildlich auf den Abbildungen 4 bis 18 dargestellt. Wie bereits bei der Diskussion der Varianzen der einzelnen Orthogonalfunktionen im Abschnitt 6 festgestellt wurde, tragen diese Funktionen wesentlich weniger zu der Gesamtvarianz bei als die zweite Funktion. Wurden durch $P_2(\phi, \lambda)$ im wesentlichen im europäischen Raum Schwankungen zwischen Gebieten verschiedener geographischer Längen dargestellt, so bezieht sich die dritte Orthogonalfunktion mehr auf Schwankungen zwischen Gebieten in verschiedenen geographischen Breiten, wobei das eine Zentrum mit 110 gpm an der Westküste Grönlands liegt, dazu gibt es drei Gegenzentren: vor der Westküste der USA, an der Lena-Mündung und über Südengland mit etwa -60 gpm.

Einen guten Überblick über die Anteile von Wellen verschiedener Wellenzahlen in den wichtigsten natürlichen Orthogonalfunktionen geben die Tabellen 19 bis 21. In der Tabelle 19 erfolgte die Aufteilung nach den Großkreiswellenzahlen n , in der Tabelle 20 nach den zonalen Wellenzahlen m und in der Tabelle 21 wurden nur die rein zonalen Wellen aufgenommen, deren Kugelflächenfunktionen in der Literatur durch das Wort "sektoral" gekennzeichnet werden. Für jede Orthogonalfunktion (Zeile) wurde der Wert der energiereichsten Welle unterstrichen.

Die Tabelle 19 enthält die über die Nordhalbkugel gemittelten Amplitudenquadrate in gpm^2 . Auf der Abszisse sind die Wellenzahlen n und die zugehörigen halben Wellenlängen aufgetragen, letztere stellen einen fiktiven Gitterabstand dar, genau genommen ist dies der kleinstmögliche Abstand zwischen einem Maximum und einem Minimum gemessen längs eines Großkreises. Die Quadrate der Kugelflächenfunktionskoeffizienten werden dabei über alle zonalen Wellenzahlen $m=0, \dots, n$ summiert:

$$\sum_k p_{ki}^2$$

dabei durchläuft k alle Werte mit $0 \leq m \leq n$, bei konstantem n . Für die Definition der p_{ki} vergleiche Formel (26). Für $n=0$ erhält man das Quadrat des Flächenmittels. Auf der Ordinate sind die Ordnungen i der natürlichen Orthogonalfunktionen angegeben. Über die erste natürliche Orthogonalfunktion ist bereits ausgiebig gesprochen worden. Sie ist auch sonst mit den übrigen deshalb nicht vergleichbar, weil ihr Koeffizient $c_1(t)$ nur um den Wert $+1$ schwankt, während die übrigen Koeffizienten um $+1$ und -1 schwanken.

Deshalb soll hier von einer Betrachtung der ersten natürlichen Orthogonalfunktion abgesehen werden, sie ist in den Tabellen 19 bis 21 nur der Vollständigkeit halber mit aufgeführt worden. Als erstes erkennen wir, daß die meiste Energie in der Welle mit der Wellenzahl 6 aus der zweiten Funktion zu finden ist. Bei dieser Welle liegen zwischen Maximum und Minimum 3333 km. Hier gehen wesentlich die Schwankungen zwischen verschiedenen geographischen Breiten ein. Den nächst kleineren Energiewert einer Welle findet man - wie zu erwarten - in der dritten Orthogonalfunktion für die Wellenzahl 5, dem entspricht ein minimaler Abstand zwischen den Extremwerten von 4000 km. Auch bei den folgenden Ordnungen bis zur 11. Orthogonalfunktion liegen die Energiemaxima bei den Wellenzahlen 5 oder 6. Auffällig ist der relativ große Wert von 136 gpm^2 in der 9. Orthogonalfunktion für die Wellenzahl 6, da die entsprechenden Werte der fünften bis achten Funktion kleiner waren. Ab der 12. Orthogonalfunktion verschieben sich die Energiemaxima zu noch höheren Wellenzahlen, also kleineren Wellenlängen. Insgesamt nimmt der Anteil der kurzen Wellen mit wachsender Ordnung zu, doch bleibt der Einfluß der Wellen mit halben Wellenlängen von 10000 km und mehr auch bei den Funktionen mit niedrigen Ordnungszahlen gering.

Diese Verhältnisse stellen sich ganz anders dar, falls man die Einteilung nach zonalen Wellenzahlen m betrachtet (Tab. 20). Hier kann man die Wellenlängen nicht mehr in km angeben, da ihre tatsächliche Länge von dem Kosinus der geographischen Breite abhängt. In 50°N ist ihre Länge um den Faktor 0,644 kleiner als der entsprechende Wert einer Großkreiswelle. Aus diesem Grund wurde die halbe Wellenlänge auf der Tabelle 20 in Längengraden angegeben. Die Werte für $m=0$ stellen die Amplitudenquadrate der zonal gemittelten

natürlichen Orthogonalfunktionen dar. Nur bei der 7. und der 13. Orthogonalfunktion ist dies der größte Zeilenwert; er wird jedoch bei der ersteren mit 108 gegen 107 gpm^2 dicht gefolgt von der Welle mit der Wellenzahl 2. Die Energie der zonal gemittelten Werte ist also von der gleichen Größenordnung wie die der Wellen mit den Wellenzahlen 1 bis 4; sie ist aber eindeutig kleiner als deren Summe. Im Gegensatz zu der Aufteilung nach Großkreiswellen spielen die zonalen Wellen mit den Wellenzahlen 5 und 6 nur eine unbedeutende Rolle. Es läßt sich aus dieser Tabelle auch keineswegs die häufig geäußerte Vermutung bestätigen, daß die zonale Wellenzahl 3 eine besondere Rolle spielt. Im Gegenteil: Besonders große Energiewerte findet man bei den zonalen Wellenzahlen $m=1$, so bei der 4. Orthogonalfunktion mit 349 gpm^2 und bei der Wellenzahl $m=2$, so bei der 2. Orthogonalfunktion mit 313 gpm^2 .

Mit rein zonalen Wellen (Tabelle 21) werden solche Wellen bezeichnet, deren absolute Extremwerte auf dem Äquator liegen, von wo sich Rücken und Tröge entlang von Längengraden bis zu den Polen erstrecken. Die entsprechenden mathematischen Funktionen heißen sektorale Kugelflächenfunktionen. Größenordnungsmäßig sind diese Wellen unbedeutend. Sie müssen sich ja bis zum Äquator erstrecken, und diese Gebiete mit den äußerst geringen Luftdruckgegensätzen gehen wegen ihrer großen Flächen auch noch mit einem großen Gewicht ein. Den größten Wert mit 14 gpm^2 findet man in der fünften Orthogonalfunktion für die Wellenzahl 2. Bei diesen Funktionen kann man die Lage der Extrema angeben. Die Maxima liegen auf den Längengraden von 123°E und 57°W . Die nächst größte Welle mit 13 gpm^2 ist ein Teil der 8. Orthogonalfunktion und hat die Wellenzahl 1. Ihr Maximum liegt auf dem Längengradkreis

von 119°E .

Soviel über die Eigenschaften der einzelnen Orthogonalfunktionen selbst und ihre Spektralzerlegung in Kugelflächenfunktionen.

8. Das Filtern von aktuellen Feldern mit natürlichen Orthogonal- funktionen

Für die Diagnose einzelner, halbtäglicher Geopotentialfelder der 500 mb-Fläche kann man die gegebenen Felder mit Hilfe der natürlichen Orthogonalfunktionen derart filtern, daß einerseits die Übersichtlichkeit noch gewahrt bleibt, andererseits aber auch hinreichend viele Einzelheiten noch berücksichtigt werden.

Die durch Gleichung (4) gegebenen Teilreihen $\Phi_n(\phi, \lambda, t)$ sind exakt gefilterte Felder der ursprünglichen Funktion $\Phi(\phi, \lambda, t)$.

Man hat lediglich die betreffenden Koeffizienten $c_i(t)$ gemäß der Formel (17) zu berechnen, um $\Phi_n(\phi, \lambda, t)$ nach Formel (4) zu ermitteln. Als Beispiel sei der 7.1.1972 um 12 Uhr GMT dargestellt (Abb. 19). Mit nur zwei Gliedern (Abb. 20), dem ersten und zweiten Glied, erhält man klar die beiden Tiefdruckgebiete über Nordostkanada und über Nordwestsibirien sowie den Rücken über Mitteleuropa. Der größte Fehler (Abb. 21) tritt dabei mit 240 gpm über Alaska auf. Verwendet man die ersten zehn Reihenglieder (Abb. 22), so erhält der Rücken über Mitteleuropa bereits die richtige Form und der leichte Rücken über dem Nordpazifik und der Beringstraße läßt sich auch bereits erkennen. Die Abbildung 23 zeigt, daß die Fehler - bis auf kleine Ausnahmestellen - unter 100 gpm liegen. Verwendet man schließlich alle Reihenglieder

bis zum 22sten Glied (Abb. 24), so sind die Unterschiede gegenüber der tatsächlichen Geopotentialgleichung nur noch an den Stellen erkennbar, wo die horizontalen Geopotentialgradienten ohnehin sehr gering bleiben, also über Mitteleuropa und über Ostsibirien. Der absolute Fehler (Abb. 25) bleibt fast überall verschwindend gering und zeigt eine nahezu gleichmäßige, annähernd statistische Verteilung.

9. Die Abhängigkeit der natürlichen Orthogonalfunktionen von der Land-Meer-Verteilung, der Orographie und den extraterrestrischen Strahlungsparametern

Die von Zeit und Ort abhängige Funktion $\Phi(\phi, \lambda, t)$ kann man sich als Lösung des entsprechenden Differentialgleichungssystems der Meteorologie vorstellen. Die natürlichen Orthogonalfunktionen stellen sozusagen den nur vom Ort abhängigen Anteil dieser Lösung dar. Dann liegt jedoch der Schluß nahe, daß die natürlichen Orthogonalfunktionen von denjenigen Randbedingungen und denjenigen Parametern des meteorologischen Differentialgleichungssystems abhängen, die reine Funktionen des Ortes sind. Das sind an der Atmosphärenuntergrenze die Land-Meer-Verteilung und die Höhe der Atmosphärenuntergrenze - hier Orographie genannt -, und an der Atmosphärenobergrenze sind es die absorbierte Sonneneinstrahlung, die Strahlungsbilanz, die langwellige Ausstrahlung und die Albedo.

Um diese Korrelationen untersuchen zu können, wurden die oben genannten Felder ebenfalls nach am Äquator gespiegelten Kugelflächenfunktionen entwickelt. Für die Orographie wurden dabei

die Tabellen von L. BERKOWSKY und BERTONI [8] zugrundegelegt.

Die Land-See-Verteilung basiert auf den gleichen Werten, indem für alle Höhenwerte >0 jeweils Land angenommen wurde, das den Wert 1 erhielt und für alle Höhenwerte $=0$ wurde Meer angenommen und der Wert 0 eingesetzt. Bei einer Auflösung bis zur Wellenzahl fünf erhält man die Abbildung 26. Die Küstenlinie wird durch die 50%-Linie angenähert. Den Strahlungsdaten lagen Satellitenmessungen des Jahres 1969/70 zugrunde, die von RASCHKE et al. [9] zu jährlichen Mittelkarten zusammengestellt worden sind. Sie sind auf den Abbildungen 27, 28, 29 und 30 dargestellt.

Als Maß für die Abhängigkeit der Orthogonalfunktion $P(\phi, \lambda)$ von der Randwertfunktion $X(\phi, \lambda)$ wurde der Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\overline{XP} - \overline{P} \cdot \overline{X}}{\sqrt{(\overline{P-P})^2 \cdot (\overline{X-X})^2}}$$

verwendet. Der Querstrich stellt das durch (1) definierte Flächenmittel dar. Sind $X(\phi, \lambda)$ und $P(\phi, \lambda)$ durch ihre Kugelflächenkoeffizienten gegeben:

$$X(\phi, \lambda) = \sum_{j=1}^n h_j \cdot Y_j(\phi, \lambda)$$

und

$$P(\phi, \lambda) = \sum_{j=1}^N p_j Y_j(\phi, \lambda),$$

so erhält man wegen der Orthogonalität der $Y_j(\phi, \lambda)$

$$r = \sum_{j=2}^{\min(n, N)} h_j \cdot p_j / \sqrt{\left(\sum_{j=2}^n h_j^2 \right) \left(\sum_{j=2}^N p_j^2 \right)}$$

Es wurde dabei die Tatsache verwendet, daß der erste Koeffizient

einer Reihe wegen $Y_1(\phi, \lambda) = 1$ genau den Flächenmittelwert darstellt, z.B. $\bar{P} = P_1$.

Die Korrelationskoeffizienten sind in der Tabelle 22 zusammengestellt. Unterhalb der prozentualen Korrelationskoeffizienten steht die größte nicht mehr herausgefilterte Wellenzahl n . Jeder größere oder kleinere Wert von n führte zu einem Korrelationskoeffizienten mit einem kleineren Absolutwert; deshalb "optimale Filterung". Nun zu den Ergebnissen selbst. Die engsten Beziehungen bestehen zwischen der ersten natürlichen Funktion, also im wesentlichen dem klimatologischen Mittel, und den Strahlungswerten. Dabei besagt das positive Vorzeichen, daß über stationären Hochdruckgebieten die absorbierte Sonnenstrahlung, aber auch die langwellige Ausstrahlung, ein Maximum aufweisen, wobei der Wert der ersteren überwiegt, so daß auch die Strahlungsbilanz über diesen Hochdruckgebieten im Mittel positiv ist; die Albedo hat dagegen in diesen Gebieten ihr Minimum. Ist für die langwellige Ausstrahlung noch die Wellenzahl zwei optimal, das wird vor allem das Gefälle zwischen Polen und Äquator sein, so zeigt die optimale Wellenzahl drei bei der Strahlungsbilanz an, daß jetzt auch andere geographische Unterschiede für die Korrelation eine Rolle spielen müssen. Der Korrelationskoeffizient mit der Land-See-Verteilung ist wesentlich kleiner. Sein negativer Wert bedeutet, daß die stationären Hochdruckgebiete bevorzugt über dem Meer liegen. Die Korrelation der stationären Wellen mit der Orographie ist nochmal um die Hälfte kleiner. Die Orographie geht in eine ganze Reihe von natürlichen Orthogonalfunktionen höherer Ordnung mit größerem Gewicht ein. Den größten Orographie-

Einfluß hat die fünfte Orthogonalfunktion mit einer optimalen Auflösung bis zur Wellenzahl neun, das entspricht einem Gitterabstand - von Maximum zu Minimum - von etwa 22 000 km.

Der zweitstärkste Einfluß der Strahlungsgrößen schlägt sich in der zweiten natürlichen Orthogonalfunktion nieder, hier sind ein positiver Koeffizient mit minimaler Ausstrahlung, minimaler absorbierte Sonnenstrahlung und einem Strahlungsdefizit korreliert. Überraschend ist die große optimale Auflösung für die absorbierte Sonnenstrahlung, die langwellige Ausstrahlung und die Albedo. Zur weiteren Untersuchung dieser Abhängigkeiten der natürlichen Orthogonalfunktionen wurde angenommen, daß sich die Orthogonalfunktionen $P(\phi, \lambda)$ linear aus den Strahlungsfunktionen, der Land-Meer-Verteilung und der Orographie darstellen lassen, die hiermit $g_i(\phi, \lambda)$ bezeichnet werden sollen:

$$P(\phi, \lambda) = C_0 + \sum_{i=1} C_i g_i(\phi, \lambda) + f(\phi, \lambda)$$

Dabei sollen die Mehrfachregressionskonstanten C_i so bestimmt werden, daß das über die Nordhalbkugel gemittelte Quadrat der Fehlerfunktion $f(\phi, \lambda)$ ein Minimum wird:

$$D = \overline{f^2} = \text{minimal}$$

D wird üblicherweise Restdispersion genannt, $D/(\overline{P^2} - \overline{P}^2)$ ist die relative Restdispersion, \sqrt{D} ist die Standardabweichung und

$$r = \sqrt{1 - \frac{D}{\overline{P^2} - \overline{P}^2}} \prod_{i=1} \text{sign}(C_i)$$

heißt verallgemeinerter Korrelationskoeffizient; ganz rechts steht das Produkt über die Vorzeichen der Regressionskoeffizienten. Bei der Bestimmung der Regressionskoeffizienten wurde versucht, die

die Funktionen $g_i(\phi, \lambda)$ genau wie bei der Berechnung der echten Korrelationskoeffizienten so zu filtern, daß die Restdispersion D minimal wird. Die Koeffizienten C_i sind für die ersten sieben natürlichen Orthogonalfunktionen $P(\phi, \lambda)$ in der Tabelle 23 zusammengestellt außerdem findet man in dem unteren Teil der Tabelle die zugehörigen Genauigkeitsangaben. Für die erste natürliche Orthogonalfunktion bedeutet die zweite Zahl von oben: Nimmt die Sonneneinstrahlung am Oberrand der Atmosphäre - vom Nordpol zum Äquator - um 1 watt m^{-2} zu so erhöht sich die 500 mb-Fläche um 5,16 gpm, wenn gleichzeitig die Abhängigkeit von den Funktionen $g_2(\phi, \lambda)$ bis $g_8(\phi, \lambda)$ berücksichtigt wird. Die Standardabweichung der optimal linear aus diesen Funktionen zusammengesetzten Näherungsfunktionen beträgt $\pm 43 \text{ gpm}$. Das ist ein größerer absoluter Fehler als man ihn für die folgenden sieben natürlichen Orthogonalfunktionen erhält. Der Fehler beträgt 16,5% der mittleren quadratischen Gesamtschwankung der 1. Funktion. Der verallgemeinerte Korrelationskoeffizient hat den Wert 0,9863. Vergleicht man die Regressionskoeffizienten der 1. Funktion mit den entsprechenden Koeffizienten der folgenden sieben Funktionen, so haben die Koeffizienten der Land-Meer-Verteilung und der Albedo für die erste Funktion nicht den erwarteten jeweils absolut größten Wert. Die geographische Verteilung der Albedo hängt wesentlich mit der Wolkenverteilung zusammen und diese ist offensichtlich stärker an variable Wettersituationen als an stationäre klimatologische Einflüsse gekoppelt. An die Stelle des etwas abgeschwächten Einflusses der Land-Meer-Verteilung tritt in der ersten Orthogonalfunktion die Minimum-Albedo, durch die ja die Albedo der Erdoberfläche angenähert wird.

Soviel zur Darstellung der ersten Funktion, also des klimatologisch Wintermittels. Bei der zweiten Funktion ist der äußerst geringe Einfluß der Orographie bemerkenswert. Überhaupt läßt sich diese Funktion nur schwer durch die angegebenen Horizontalverteilungen annähern. Sie muß daher stärker dynamische und weniger klimatologische Einflüsse darstellen. Ganz im Gegensatz zur 3. Funktion mit der kleinen Standardabweichung von 17 gpm. Die 3. Funktion ist am stärksten an die klimatologische Albedoverteilung gekoppelt, deren Koeffizient hier den größten Wert aufweist. Von den weiteren natürlichen Orthogonalfunktionen soll noch die 6. hervorgehoben werden, da bei ihrer Approximation die Land-Meer-Verteilung ihren größten Beitrag leistet. Betrachtet man die relativen Standardabweichungen aller acht Funktionen, so findet man Werte zwischen 16% und 86%, der zweitbeste Wert liegt bei 60%.

Das ist wenig. Sicher würde man bessere Werte erreichen, wenn man die Ost-West-Verschiebung der Felder berücksichtigen könnte, deren Ursache die Erdrotation ist. Um diesen Einfluß auf das Geopotentialfeld durch einen linearen Ansatz berücksichtigen zu können, muß sicher eine neue Größe aus der Erdrotation und den verwendeten $g_1(\phi, \lambda)$ durch nichtlineare Kombination bestimmt werden, die dann für die Regressionsrechnung verwendet werden kann. Dazu sollten physikalisch-meteorologische Beziehungen Verwendung finden.

Die Überlegungen werden in dieser Richtung fortgeführt. Schließlich ist auf der Tabelle 23 noch für jeden Koeffizientenwert die größte noch berücksichtigte Großkreiswellenzahl n der $g_1(\phi, \lambda)$ -Funktion angegeben, die zu einer möglichst guten Gesamtapproximation führt. Die einflußreiche klimatologische Albedoverteilung in der 3. natürlichen Orthogonalfunktion führt bei der feinsten

räumlichen Auflösung zu der optimalen Approximation.

10. Die zeitabhängigen Koeffizienten der natürlichen Orthogonal-
funktionen von November 1967 bis Januar 1968

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die zeitunabhängigen Funktionen $P_i(\phi, \lambda)$ betrachtet. In der Reihendarstellung (3) des Geopotentials der 500 mb-Fläche treten aber noch die zeitabhängigen Koeffizienten $c_i(t)$ auf, die jedoch nicht vom geographischen Ort abhängen, also hemisphärische Zirkulationsparameter darstellen.

Für jeden einzelnen Termin t lassen sie sich nach Formel (17) aus der betreffenden natürlichen Orthogonalfunktion und dem aktuellen Geopotential $\Phi(\phi, \lambda, t)$ durch Bildung des inneren Produkts berechnen. Wegen der durch Formel (14) definierten Normierung sind sie dimensionslos. Multipliziert man sie mit dem Gewicht w_i , der Wurzel aus dem Eigenwert, so erhält man einen Wert in der anschaulichen physikalischen Dimension des Ausgangsfeldes, also in gpm. Diese Zirkulationsparameter wurden für den Zeitabschnitt vom November 1967 bis zum Januar 1968 berechnet. Eigentlich ist die Berechnung für den November unzulässig, weil die zugehörigen Orthogonalfunktionen nur für die Monate Dezember bis Februar gültig sind. Trotzdem sollen hier auch die Werte für den November präsentiert werden (Abb. 31 bis 36). Auf der Abszisse ist die Zeit vom 1. November 1967 bis zum 31. Januar 1968 aufgetragen, jeder Monatswechsel ist durch einen Strich angedeutet. Auf der Ordinate ist jeweils das Produkt $w_i \cdot c_i(t)$ in gpm aufgetragen.

Der erste Koeffizient (Abb. 31) stellt im wesentlichen den hemisphärischen Mittelwert dar. Man erkennt einen jahreszeitlichen Trend, der sich durch die Temperaturabnahme in der unteren Hälfte der Atmosphäre der Nordhalbkugel erklären läßt. Von Anfang November bis Mitte Januar sinkt die mittlere 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel um etwa 80 mb. Die kleinskaligen, halbtäglichen Fluktuationen lassen sich kaum rein meteorologisch deuten, da es sich um Mittelwerte über die Nordhalbkugel handelt, bei der sich Schwankungen des Tagesganges herausmitteln sollten. Es wäre denkbar, daß unterschiedliche systematische Fehler der verschiedenen regionalen Radiosondentypen diese Erscheinung hervorrufen. Größenordnungsmäßig liegt die Höhe der 500 mb-Fläche um 12 GMT um 2 bis 3 gpm höher als um 0 Uhr. Bei den Koeffizienten der zweiten Ordnungen sind dagegen die kurzwelligen Fluktuationen trotz der halbtägigen Daten ziemlich unbedeutend. Man findet im wesentlichen eine Wellenlänge von 20 Tagen. Das bedeutet: die nordhemisphärische Zirkulation stellt sich im Mittel innerhalb eines Zeitraumes von 10 Tagen um. Auch die Koeffizienten der nächsthöheren Ordnungen (Abb. 31 und 32) zeigen im wesentlichen noch Schwankungen der gleichen Periode. Mit wachsendem Index etwa ab $w_6 \cdot c_6$ (Abb. 32 bis 34) nimmt jedoch der Anteil von kurzzeitigeren Fluktuationen mit Perioden von 5 bis 7 Tagen zu. Diese Fluktuationen sind den wandernden Tiefdruckgebieten zugeordnet, die den ultralangen Wellen der nordhemisphärischen Zirkulation überlagert sind. Mit wachsender Ordnung der Koeffizienten nimmt sowohl die Amplitude als auch die Periode ab. Der 22. Koeffizient (Abb. 35) zeigt dabei nahezu keinen Tagesgang, den man bei dem 23. Koeffizienten

dagegen erkennen kann. Die mittlere Periode liegt bei beiden etwa bei vier Tagen.

Die Abbildung 36 soll zeigen, wie die höheren Koeffizienten immer mehr einen rein zufälligen und unbedeutenden zeitlichen Verlauf annehmen, dem ab dem 27. Koeffizienten keine meteorologische Bedeutung mehr zugeschrieben werden kann. Der 79. Koeffizient ist der letzte mögliche Koeffizient in diesem System.

11. Ein klimatologisches Windfeld abgeleitet aus der ersten natürlichen Orthogonalfunktion

Da diese Arbeit einen Beitrag zur Untersuchung der allgemeinen Zirkulation darstellen soll, wurde auch ein mittleres Windfeld berechnet. Dabei ging man von der 1. natürlichen Orthogonalfunktion aus, die etwa das winterliche klimatologische Geopotentialfeld der mittleren Atmosphäre darstellt. Da alle Felder auf der ganzen Nordhalbkugel bis zum Äquator definiert sind, kann ein rein geostrophischer Wind nicht berechnet werden, da er auf dem Äquator nicht definiert werden kann. Dort müßte durch den Coriolisparameter, der dort Null ist, dividiert werden. Um diese Schwierigkeit auf die einfachste und vernünftigste Art und Weise zu beseitigen, wurde noch ein lineares Bodenreibungsglied eingeführt. Vernachlässigt man also in den Bewegungsgleichungen die Beschleunigungsterme und die Horizontalreibung, so daß nur der auf der Erdrotation beruhende Coriolisterm, der Druckgradiententerm und ein linearer Bodenreibungsterm übrig bleiben, so kann man damit, wie in der Arbeit von FECHNER [4] gezeigt wird, ein Windfeld berechnen. Für die Bodenreibungskonstante wurde dabei der Betrag des Coriolisparameters in 5°N verwendet.

Die Rechnungen erfolgen auf der Grundlage, daß skalare Felder durch Reihen von Kugelflächenfunktionen und Vektorfelder durch die dazu analogen orthogonalen Vektorfunktionen (vector spherical harmonics) dargestellt werden. Das so berechnete Windfeld ist auf der Abbildung 37 dargestellt. Die Stärke der wesentlichsten Vektorwellen dieses Windfeldes - dargestellt durch die Koeffizienten der einzelnen orthogonalen Vektorfunktionen - sind auf der Tabelle 24 zu finden. Da die von mir verwendeten Vektorfunktionen auf 1 normiert sind, haben die Koeffizienten die richtige physikalische und größenordnungsmäßige Dimension. R bedeutet rotationeller und divergenzfreier Vektor, D kennzeichnet einen divergenten und rotationsfreien Vektor. Divergente Vektorwellen findet man nur für $m=0$; sie sind unabhängig von der geographischen Länge. Die Abbildungen 38 bis 41 sollen nur die Form der betreffenden Vektorwellen darstellen, die Größe und das Vorzeichen der einzelnen Wellenterme unseres Windfeldes werden durch die Koeffizienten der Tabelle 24 gegeben. Durch die Vektorfunktion der Großkreiswellenzahl $n=2$ (vergl. die Abb. 38) wird Luft vom Äquator zum Pol transportiert. Der Term für $n=4$ (vergl. die Abb. 39) erhält ein negatives Vorzeichen. Damit wird in den nördlichen Breiten Luft nach Süden transportiert, womit dort insgesamt der divergente Wind nahezu verschwindet. In den Subtropen weht er jedoch nach Norden und verstärkt dort den Anteil aus der divergenten Vektorwelle $n=2$. Insgesamt macht sich also in der 500 mb-Fläche über den Subtropen der divergente Antipassat bemerkbar. Alle übrigen Vektorwellen sind divergenzfrei, also rotationell. Am kräftigsten ist die Welle mit $n=1$, $m=0$ (Abb. 40) ausgeprägt, die bis zum Äquator hin eine Westwinddrift darstellt. Dann folgen die

ebenfalls längenunabhängigen Wellen mit den Großkreiswellenzahlen $n=3$ (Abb. 41) und $n=5$ (Abb. 42). Durch die erstere wird die Westwinddrift in Äquatornähe abgeschwächt, in den nördlichen Breiten jedoch kräftig verstärkt. Bei der letzteren hat man den negativen Wert des Koeffizienten zu berücksichtigen. Damit erfolgt eine weitere Verstärkung der Westwinddrift in den gemäßigten Breiten und ihre Abschwächung sowohl in den Tropen als auch in der Nähe des Pols. Als letzte wesentliche Modifikation geht in unser Windfeld noch die Vektorwelle der Abb. 43 mit $n=6$, $m=3$ und $\sigma=1$ - jedoch mit negativem Vorzeichen - ein.

12. Weitere Anwendungsmöglichkeiten dieser Funktionen und Ausblick

Da die Teilreihen (4) der natürlichen Orthogonalfunktionen bei vorgegebenem Freiheitsgrad n stets die optimale Darstellung eines aktuellen Geopotentialfeldes $\Phi(\phi, \lambda, t)$ - optimal im Sinne kleinster Fehlerquadrate - liefert, kann man diese Funktionen zur objektiven Analyse von Geopotentialfeldern, also zur horizontalen Interpolation verwenden. Ein mögliches Verfahren sieht so aus: Das gesuchte Feld zur Zeit t wird durch eine Reihe (3) oder (4) mit den bekannten natürlichen Orthogonalfunktionen aber zunächst unbekannten Koeffizienten $c_i(t)$ angesetzt. Die $c_i(t)$ werden dann so bestimmt, daß die Summe der Fehlerquadrate an den Orten mit Meßwerten ein Minimum wird. Es ist angebracht, bei der Summation der Fehlerquadrate Gewichte zu verwenden, die dem von anderen Meßorten freien "Einflußbereich" jedes einzelnen Meßortes proportional sind. Eine einfache Methode, um diese Gewichte zu berechnen wurde von FECHNER [10] angegeben.

Eine andere Anwendungsmöglichkeit der natürlichen Orthogonalfunktionen ist ihre Verwendung in Zirkulations- oder Vorhersagemodellen. Die meteorologischen Variablen werden durch Reihen Gl. (3) von Orthogonalfunktionen dargestellt. Da die Orthogonalfunktionen $P_i(\phi, \lambda)$ bekannt sind, erhält man ein Spektralmodell mit den Koeffizienten $c_i(t)$ als neuen, eindimensionalen Variablen. Der Vorteil gegenüber anderen Spektralmodellen besteht darin, daß man mit der geringsten Anzahl von neuen Variablen die größtmögliche Auflösung erreicht. Ein Beispiel für die Anwendung horizontaler natürlicher Orthogonalfunktionen in einem spektralen Vorhersagemodell geben KARHILA und RINNE [11]. Diese Methode scheint besonders für Vorhersagegebiete geeignet zu sein, die nur einen Teil der Hemisphäre umfassen. FREIBERGER und GRENANDER [12] haben darauf hingewiesen, daß eine systematische Untersuchung der rein zeitabhängigen Koeffizienten $c_i(t)$ auf ihre Frequenzspektren und ihre zeitliche Erhaltungseigenschaft auch direkt zu statistischen Vorhersagemethoden unter Verwendung von horizontalen natürlichen Orthogonalfunktionen führen kann. VOGLER [13] verwendet natürliche Orthogonalfunktionen für die örtliche Wettervorhersage, indem er mit ihrer Hilfe analoge Feldverteilungen auswählte.

Die in dieser Arbeit durchgeführte Darstellung des Geopotentials der 500 mb-Fläche durch natürliche Orthogonalfunktionen soll mit halbtäglichen Daten auf alle Jahreszeiten ausgedehnt werden. Dabei ist vorgesehen, zunächst für jeden Monat des Jahres eine mittlere Verteilung zu berechnen, daraus durch Entwicklung in eine zeitliche Fourierreihe eine zeitlich stetige Funktion des Jahresganges abzuleiten. Es sollen dann

nur die aktuellen Abweichungen von diesem Jahresgang nach horizontalen natürlichen Orthogonalfunktionen entwickelt werden. Die übrigen Untersuchungen sollen ganz analog zu den hier durchgeführten erfolgen. Damit hätte man dann die meteorologische Erfahrung , die uns die jahrelangen Routinemessungen des Geopotentials der 500 mb-Fläche geliefert haben, in komprimierter Form dargestellt.

13. Danksagung

Diese Arbeit wurde als Teil des Forschungsprojektes "Energiehaushalt und Zirkulation der Atmosphäre" mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell gefördert.

Die umfangreichen Berechnungen wurden am Rechenzentrum der Kieler Universität durchgeführt. Beiden Institutionen sei dafür gedankt.

1. LORENZ, E.N.: Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Fin.Rep. Statist. Forecasting Proj. 1959. Mass. Inst. Techn., Dep. of Met. Anhang I, 29-78.
2. BRADLEY, J. und A. WIIN-NIELSEN, 1968: On the transient part of the atmospheric planetary waves. Tellus 20, 3, 533-54
3. CRADDOCK, J.M. und FLOOD, C.R., 1969: Eigenvectors for representing the 500 mb geopotential surface over the Northern Hemisphere. Quart. J.R. Met. Soc 95, No. 405, 576-593.
4. FECHNER, H., 1973: Orthogonale Vectorfunktionen zur stetigen Darstellung von meteorologischen Feldern auf der Kugeloberfläche. Ber. Inst. Meereskde-Kiel, Nr. 1
5. ARPE, K., 1972: Pers. Mitt., Inst. Meereskde-Kiel
6. RALSTON, A. und WILF, L.S., 1967: Mathematische Methoden für Digitalrechner. (Bd.1), 152-168. München, Wien.
7. SCHERHAG, R., 1960: Einführung in die Klimatologie. Tafel IV. Braunschweig.
8. BERKOWSKY, L. und BERTONI, E.A., 1960: Topographic charts at one-degree intersections for the entire earth. GRD Research Notes 42, Bedford/Mass.

9. RASCHKE, E., F. VONDEER HAAR, M. PASTERNAK und W.R. BANDEEN,
1973: The radiation balance of the earth-atmosphere system
for Nimbus 3 radiation measurements (16. April 1969
3 February 1970).
NASA, TN (Techn.Note) Godd, Nr, D-7249, 1-73.
10. FECHNER, H., 1975: Eine objektive Methode zur direkten Mittelung
über unregelmäßig verteilte Stationswerte auf einer Fläche.
Vortrag, Kolloqu. GARP-Arbeitsgr.: DEFAAZ 6.4.-10.4.1975
S. 3.1-3.4, DAMP 2000. Veröffentl. in Vorber.
11. KARHILA, V. und RINNE, J., 1974: Spectral model in horizontal
empirical orthogonal functions. GARP Rep. 7, 324-332.
12. FREIBERGER, W. und GRENANDER, U., 1965: On the formulation of
statistical meteorology. Rev. Intern. Statist. Inst. 33,
Nr. 1.
13. VOGLER, P., 1973: Über die Anwendung natürlicher Orthogonal-
funktionen zur Auswahl analoger Feldverteilungen.
Abhandl. Meteorol. Dienst DDR, 147-158.

Tabelle 1

Eigenwerte (Gewichte) der natürlichen Orthogonal-
Funktionen und die Fehler ihrer Teilreihen

i	w_i^2 in (gpm) ²	F_i in gpm	F_i/F_1 in %	F_i^2/F_1^2 in %	w_i^2/F_1^2 in %
0		5607.9	6414.49	411456.41	
1	31441250.0	87.4	100.00	100.00	411356.41
2	9997.3	81.5	93.23	86.93	13.07
3	657.0	77.4	88.50	76.33	8.60
4	628.0	73.2	83.73	70.11	8.22
5	532.2	69.5	79.47	63.15	6.96
6	464.9	66.0	75.54	57.07	6.08
7	428.5	62.7	71.74	51.46	5.61
8	383.9	59.6	68.15	46.44	5.02
9	339.4	56.7	64.81	42.00	4.44
10	291.5	54.0	61.80	38.19	3.81
11	246.7	51.7	59.13	34.96	3.23
12	205.5	49.7	56.81	32.27	2.69
13	204.0	47.6	54.41	29.60	2.67
14	189.2	45.5	52.08	27.13	2.48
15	178.3	43.5	49.79	24.79	2.33
16	161.3	41.6	47.63	22.68	2.11
17	144.1	39.9	45.60	20.80	1.88
18	121.0	38.3	43.83	19.21	1.58
19	118.9	36.7	42.02	17.66	1.56
20	102.0	35.3	40.40	16.33	1.33
21	100.7	33.9	38.74	15.01	1.32
22	88.1	32.5	37.22	13.86	1.15
23	78.3	31.3	35.82	12.93	1.02
24	73.4	30.1	34.45	11.87	.96
25	69.5	28.9	33.11	10.96	.91
26	66.9	27.8	31.76	10.09	.87
27	63.4	26.6	30.42	9.26	.83
28	52.4	25.6	29.28	8.57	.68
29	49.0	24.6	28.16	7.93	.64
30	45.6	23.7	27.08	7.33	.60
31	40.7	22.8	26.08	6.80	.53
32	39.4	21.9	25.07	6.29	.52
33	37.7	21.0	24.07	5.79	.49
34	33.7	20.2	23.13	5.35	.44
35	31.0	19.4	22.24	4.95	.41
36	29.7	18.7	21.35	4.56	.39
37	26.3	17.9	20.53	4.21	.34
38	24.6	17.2	19.73	3.89	.32
39	22.3	16.6	18.97	3.60	.29
40	20.5	16.0	18.25	3.33	.27
41	18.5	15.4	17.58	3.09	.24
42	17.7	14.8	16.91	2.86	.23
43	16.3	14.2	16.27	2.65	.21
44	15.9	13.7	15.61	2.44	.21
45	15.4	13.1	14.95	2.24	.20
46	12.7	12.6	14.39	2.07	.17
47	12.6	12.1	13.80	1.90	.16
48	11.2	11.6	13.26	1.76	.15
49	10.8	11.1	12.72	1.62	.14
50	10.0	10.7	12.19	1.49	.13
51	8.8	10.2	11.71	1.37	.12
52	8.5	9.8	11.22	1.26	.11
53	8.3	9.4	10.73	1.15	.11
54	7.3	9.0	10.29	1.06	.10
55	6.8	8.6	9.83	.97	.09
56	6.5	8.2	9.39	.88	.09
57	6.4	7.8	8.93	.80	.08
58	5.8	7.4	8.50	.72	.08
59	5.3	7.1	8.08	.65	.07
60	4.9	6.7	7.67	.59	.06
61	4.3	6.4	7.30	.53	.06
62	4.1	6.1	6.82	.48	.05
63	3.4	5.8	6.59	.43	.04
64	3.3	5.5	6.25	.39	.04
65	3.3	5.2	5.90	.35	.04
66	2.9	4.9	5.56	.31	.04
67	2.9	4.6	5.21	.27	.04
68	2.5	4.3	4.89	.24	.03
69	2.3	4.0	4.57	.21	.03
70	2.1	3.7	4.26	.18	.03
71	2.0	3.4	3.93	.15	.03
72	2.0	3.1	3.59	.13	.03
73	1.8	2.8	3.25	.11	.02
74	1.7	2.5	2.89	.08	.02
75	1.4	2.2	2.54	.06	.02
76	1.4	1.9	2.14	.05	.02
77	1.3	1.5	1.71	.03	.02
78	1.1	1.0	1.20	.01	.01
79	1.1	.0	.00	.00	.01

Tabelle 2

Kugelflächenfunktionskoeffizienten und Energiespektrum
 der 1. natürlichen Orthogonalfunktion des Geopotentials
 der Nordhalbkugel in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

		Großkreiswellenzahl n →												Quadratsumme			rein zonaler Anteil (n=m)	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	in gpm ²	in 10 ¹² kj ⁺	in %	in %
zonale Wellenzahl m ↓	0	5601	-254		2		24		-14		-1		1	65450	109400	nicht	mitberücksichtigt	
	1 sin		11		4		-11		-1		5		-3	1289	2360	40,90	71	36°W
	1 cos		-15		-25		-2		12		2		-3					
	2 sin			6		23		11		-6		4		956	1624	30,34	8	33°E, 147°W
	2 cos			3		7		10		6		-3						
	3 sin				7		22		12		-5		-2	760	1291	24,12	13	23°W, 143°W, 97°E
	3 cos				-3		-4		-6		1		2					
	4 sin					-6		-5		-5		0		101	172	3,21	6	
	4 cos					0		2		2		0		-2				
5 sin						-1		-2		-1		1	31	53	0,98	0,2		
5 cos						0		2		4		1						
6 sin							-1		-2		0		11	19	0,35	1		
6 cos							2		0		1		0					
7 sin								-1		0		0	2	3	0,06	0,2		
7 cos								-1		0		-1						
8 sin									0		0		-1	1	2	0,03	0,2	
8 cos									1		0		0					
Quadrat = summe		in gpm ²	342	64715	707	626	599	853	337	292	70	26	27	7	68601			
		in 10 ¹² kj ⁺	582	110300	1201	1064	1019	1450	574	496	119	44	46	12	116700			
		in %	0,35	94,33	1,03	0,91	0,87	1,24	0,49	0,42	0,10	0,03	0,03	0,01				

* Wellenenergie auf der Nordhalbkugel

Spektralzerlegung

der 2 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	1								
	1		9							
	2	144		4						
	3		34		3					
	4	25		104		5				
	5		5		25		0			
	6	36		160		89		1		
	7		98		41		2		1	
	8	25		36		97		2		0
	9		5		5		1		1	
	10	0		5		16		1		1
	11		8		1		2		0	
	12	1		0		1		0		1

Spektralzerlegung

der 3 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		1							
	2	16		2						
	3		53		5					
	4	121		5		4				
	5		169		61		2			
	6	9		9		20		0		
	7		45		50		13		0	
	8	4		13		17		1		1
	9		9		8		13		1	
	10	0		2		5		2		0
	11		5		2		2		1	
	12	1		0		1		1		0

Spektralzerlegung

der 4 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		1							
	2	25		2						
	3		149		9					
	4	100		5		1				
	5		181		34		1			
	6	1		10		5		2		
	7		5		34		5		0	
	8	1		10		4		8		0
	9		9		13		2		1	
	10	1		5		2		5		1
	11		1		2		0		1	
	12	0		0		0		1		0

Tabelle 6

Spektralzerlegung

der 5 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		4							
	2	36		13						
	3		2		8					
	4	9		45		5				
	5		26		82		5			
	6	1		5		65		1		
	7		45		45		20		0	
	8	4		45		34		5		0
	9		2		1		10		0	
	10	1		9		1		1		0
	11		5		1		1		1	
	12	1		0		1		0		0

Tabelle 7

Spektralzerlegung

der 6 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		5							
	2	1		1						
	3		68		4					
	4	1		25		2				
	5		58		65		2			
	6	16		5		13		1		
	7		0		81		9		0	
	8	1		26		5		10		0
	9		0		9		10		1	
	10	4		2		1		5		0
	11		0		2		0		1	
	12	4		4		1		1		0

Tabelle 8

Spektralzerlegung

der 7 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		2							
	2	4		1						
	3		18		0					
	4	64		5		2				
	5		5		13		2			
	6	36		74		34		1		
	7		37		17		10		0	
	8	1		25		45		2		0
	9		16		1		5		1	
	10	1		5		9		4		0
	11		1		0		2		1	
	12	1		2		1		5		0

Tabelle 9

Spektralzerlegung

der 8 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		13							
	2	9		8						
	3		29		1					
	4	4		65		1				
	5		82		10		1			
	6	9		5		5		1		
	7		17		2		1		0	
	8	25		25		10		1		1
	9		10		2		2		0	
	10	4		4		5		1		1
	11		4		1		2		1	
	12	0		1		1		1		1

Tabelle 10

Spektralzerlegung

der 9. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Großkreiswellenzahl n	0	0									
	1		2								
	2	9		1							
	3		9		1						
	4	9		40		0					
	5		20		5		2				
	6	0		136		2		1			
	7		5		13		8		0		
	8	1		45		8		4		0	
	9		2		8		1		1		
	10	1		5		8		1		0	
	11		1		0		1		1		
	12	0		5		1		0		0	

Tabelle 11

Spektralzerlegung

der 10. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		4							
	2	4		1						
	3		5		1					
	4	2		13		5				
	5		5		20		2			
	6	36		4		25		1		
	7		9		32		20		0	
	8	16		1		26		10		0
	9		10		13		26		1	
	10	0		0		1		4		0
	11		0		1		4		0	
	12	0		1		0		1		0

Taballe 12

Sphäralzerlegung

der 11. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpa^2

zonale Wellenzahl n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		8							
	2	0		1						
	3		13		0					
	4	4		13		5				
	5		5		9		1			
	6	0		13		50		0		
	7		20		18		10		0	
	8	4		2		34		2		0
	9		9		10		9		0	
	10	1		1		1		1		0
	11		0		1		2		0	
	12	1		0		2		1		0

Tabelle 13

Spektralzerlegung

der 12. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		4							
	2	0		2						
	3		5		5					
	4	1		4		1				
	5		5		20		5			
	6	9		10		4		0		
	7		16		1		25		0	
	8	4		16		10		1		0
	9		9		13		5		2	
	10	1		8		5		1		0
	11		1		4		0		1	
	12	1		0		1		1		1

Tabelle 14

Spektralzerlegung

der 13. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		4							
	2	9		0						
	3		16		4					
	4	4		9		0				
	5		2		16		0			
	6	25		8		2		4		
	7		13		2		4		2	
	8	9		2		1		26		1
	9		8		2		4		5	
	10	0		4		0		10		1
	11		1		1		1		1	
	12	0		1		0		1		1

Tabelle 15

Spektralzerlegung

der 14. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		8							
	2	0		1						
	3		17		1					
	4	0		0		0				
	5		4		5		0			
	6	1		1		5		5		
	7		5		9		5		0	
	8	4		4		1		20		0
	9		41		10		4		1	
	10	2		4		4		9		1
	11		8		1		2		1	
	12	0		1		2		1		0

Tabelle 16

Spektralzerlegung

der 16 . natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		1							
	2	9		1						
	3		1		2					
	4	4		2		0				
	5		5		1		1			
	6	1		9		0		2		
	7		5		5		26		1	
	8	1		10		10		13		0
	9		1		4		17		5	
	10	4		4		13		10		0
	11		0		0		1		4	
	12	0		2		1		1		0

Tabelle 17

Spektralzerlegung

der 18. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

		zonale Wellenzahl m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		1							
	2	1		2						
	3		10		1					
	4	4		5		4				
	5		1		1		0			
	6	4		2		9		1		
	7		5		5		2		2	
	8	1		2		2		5		0
	9		1		5		13		1	
	10	1		0		10		5		0
	11		0		2		5		2	
	12	0		0		1		0		0

Tabelle 18

Spektralzerlegung

der 20. natürlichen Orthogonalfunktion

des Geopotentials der Nordhalbkugel

in 500 mb im Winter (Dezember, Januar, Februar)

in gpm^2

zonale Wellenzahl m		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Großkreiswellenzahl n	0	0								
	1		1							
	2	4		1						
	3		4		0					
	4	0		1		1				
	5		0		1		1			
	6	2		0		1		1		
	7		2		1		2		1	
	8	0		1		5		10		0
	9		4		17		5		5	
	10	0		0		2		9		2
	11		1		9		8		2	
	12	0		2		1		2		1

Tabelle 19

Energiespektren der natürlichen Orthogonalfunktionen des Geopotentials
 der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel für den Winter (Dezember, Januar, Februar)
 als Funktion der Großkreiswellenzahl n
 (Die Tabellenwerte stellen die räumlich gemittelten Amplitudenquadrate in gpm^2 dar)

Ordnungs.-Nr. i der Ortho- gonalfunktion	Wellenzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	n													
	halbe Wellenlänge in km	∞	20000	10000	6667	5000	4000	3333	2857	2500	2222	2000	1818	1667
1		<u>31372650</u>	342	64715	707	626	599	853	337	292	70	26	27	7
2		0,3	7	151	38	141	32	<u>277</u>	134	172	12	19	13	2
3		0,1	1	19	56	127	<u>233</u>	33	103	34	28	11	10	2
4		0,1	1	30	154	99	<u>220</u>	18	45	20	27	12	2	1
5		0,1	5	45	11	60	<u>114</u>	66	108	88	12	14	9	2
6		0,0	4	3	76	32	<u>123</u>	30	107	44	26	10	1	7
7		0,0	2	5	18	78	16	<u>132</u>	64	71	18	17	2	6
8		0,0	13	14	32	75	<u>98</u>	20	26	64	16	15	7	3
9		0,0	2	7	9	46	30	<u>136</u>	22	53	13	16	3	4
10		0,0	3	7	5	15	24	<u>67</u>	63	50	45	8	5	1
11		0,0	8	1	14	20	14	<u>65</u>	50	38	25	3	4	4
12		0,0	3	3	10	3	33	<u>23</u>	<u>45</u>	35	29	12	4	4
13		0,0	5	9	22	16	17	43	19	<u>36</u>	18	13	3	2
14		0,0	6	1	21	0	8	8	17	33	<u>59</u>	20	14	2
15		0,0	3	4	5	24	22	15	<u>39</u>	19	25	11	8	4
16		0,0	2	10	2	4	7	12	29	<u>33</u>	28	27	4	3

Tabelle 20

Energiespektren der natürlichen Orthogonalfunktionen des Geopotentials
 der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel für den Winter (Dezember, Januar, Februar)
 als Funktion der zonalen Wellenzahl m
 (Die Tabellenwerte stellen die räumlich gemittelten Amplitudenquadrate in gpm^2 dar)

Ordnungs.-Nr. i	zonale Wellen- zahl m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
der Orthogonal- funktion	halbe Wellenlänge in Längengraden	∞	180°	90°	60°	45°	36°	30°	$\approx 26^\circ$	$\approx 23^\circ$
1		<u>31438099</u>	1289	956	760	101	31	11	2	1
2		242	157	<u>313</u>	74	203	5	4	1	1
3		153	<u>271</u>	33	125	37	34	3	2	0
4		123	<u>349</u>	32	88	10	9	15	2	1
5		47	85	120	<u>135</u>	102	36	6	0	0
6		23	154	70	<u>158</u>	18	25	17	1	0
7		<u>108</u>	79	107	26	84	14	8	1	0
8		50	<u>172</u>	111	14	24	5	4	1	3
9		18	40	<u>216</u>	27	19	9	8	2	1
10		55	30	17	<u>64</u>	58	49	17	1	0
11		10	56	31	34	<u>85</u>	25	4	0	0
12		15	40	43	45	20	39	3	1	1
13		<u>48</u>	45	25	22	3	12	41	6	2
14		6	<u>90</u>	10	23	8	9	41	3	0
15		14	45	26	33	18	19	18	4	0
16		16	13	24	9	24	<u>43</u>	24	8	0

Die Werte für $m = 0$ stellen die Amplitudenquadrate der zonal gemittelten Werte dar

Tabelle 21

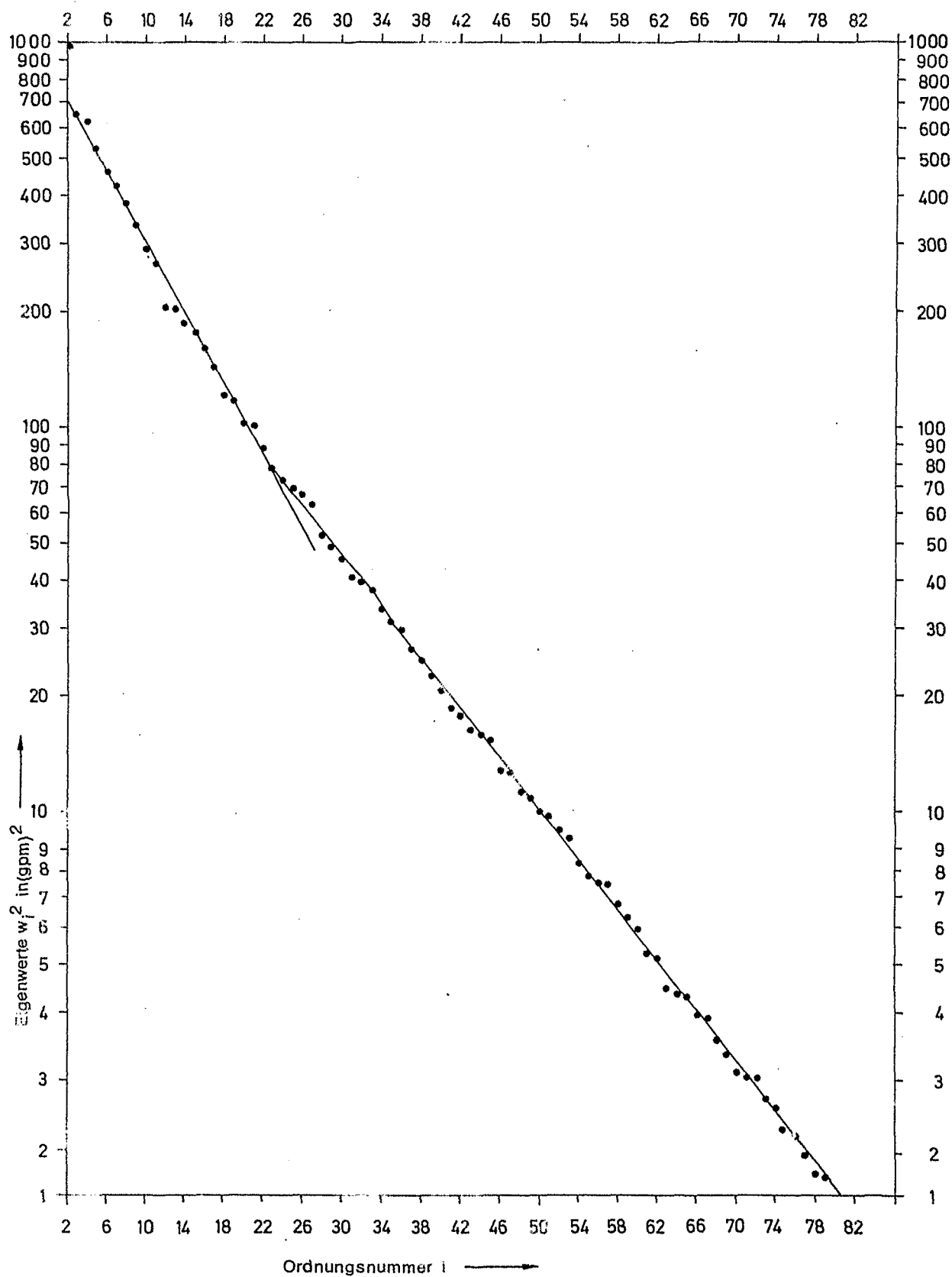
Sektorales Energiespektrum der natürlichen Orthogonalfunktion des Geopotentials der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel für den Winter (Dezember, Januar, Februar) (Die Tabellenwerte stellen das räumlich gemittelte Amplitudenquadrat in gpm^2 der Terme mit den sektoralen Kugelflächenfunktionen dar).

Ordnungs-Nr.	Wellenzahl $m = n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i der Orthogonal- funktion	halbe Wellenlänge in km	∞	20000	10000	6667	5000	4000	3333	2857	2500
	in Längengra- den	∞	180°	90°	60°	45°	36°	30°	26°	23°
1		31372650	342	40	64	31	1	5	1	1
2	0,3		<u>7</u>	5	2	5	0	1	0	0
3	0,1		1	2	<u>5</u>	2	2	0	0	0
4	0,1		1	2	<u>8</u>	2	1	1	1	0
5	0,1		5	<u>14</u>	8	4	5	2	0	0
6	0,0		<u>4</u>	2	3	1	2	2	0	0
7	0,0		<u>2</u>	1	0	1	1	0	0	0
8	0,0		<u>13</u>	7	1	1	0	1	0	0
9	0,0		<u>2</u>	1	1	0	1	1	0	0
10	0,0		<u>3</u>	1	1	3	2	1	0	0
11	0,0		<u>8</u>	1	0	5	1	0	0	0
12	0,0		3	3	<u>5</u>	0	4	0	0	0

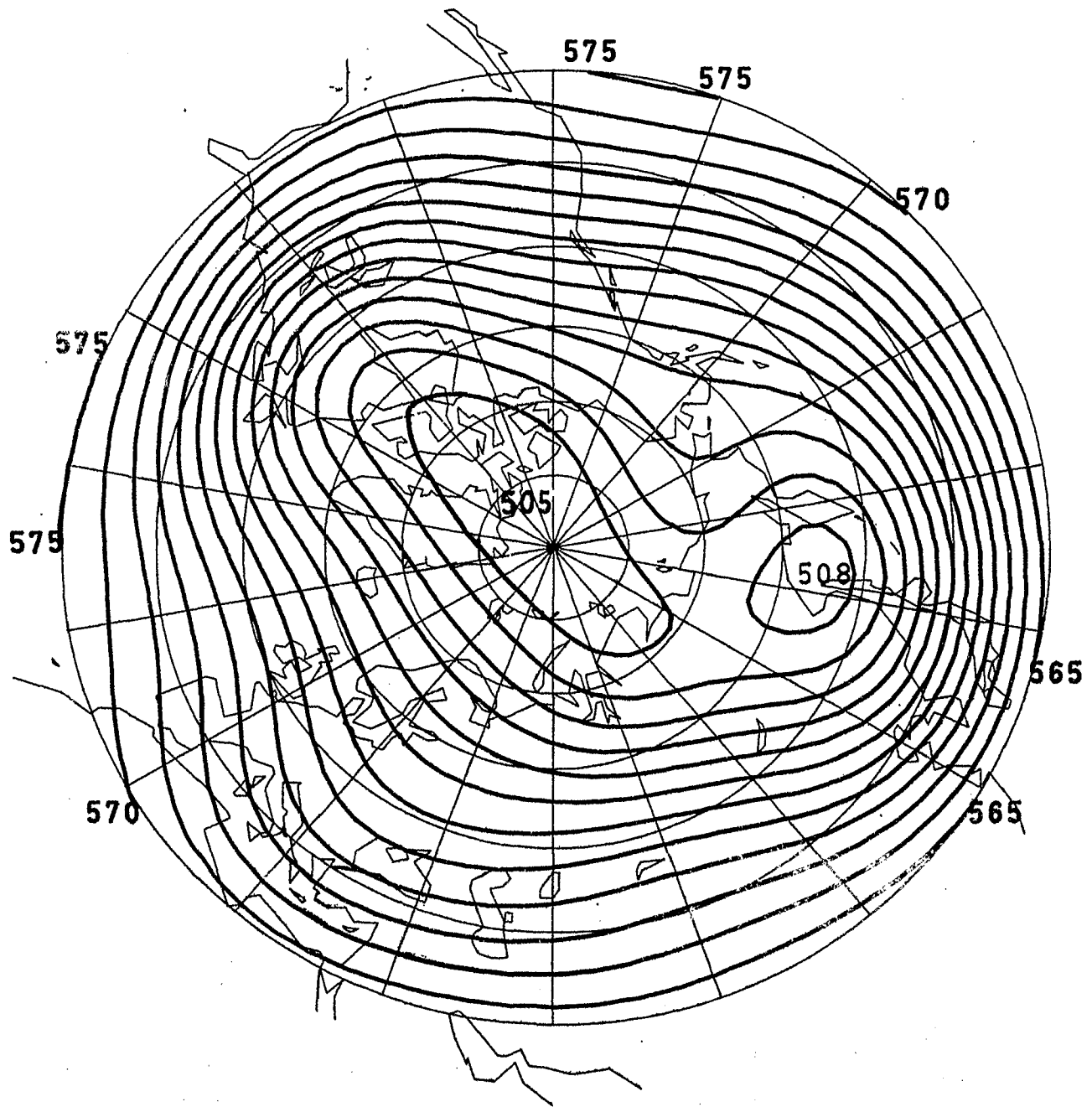
Tabelle 22

Korrelationskoeffizienten in % zwischen den natürlichen Orthogonalfunktionen einerseits und den optimal gefilterten Verteilungen von Land-Meer, der Orographie und den extraterrestrischen Strahlungsgrößen andererseits

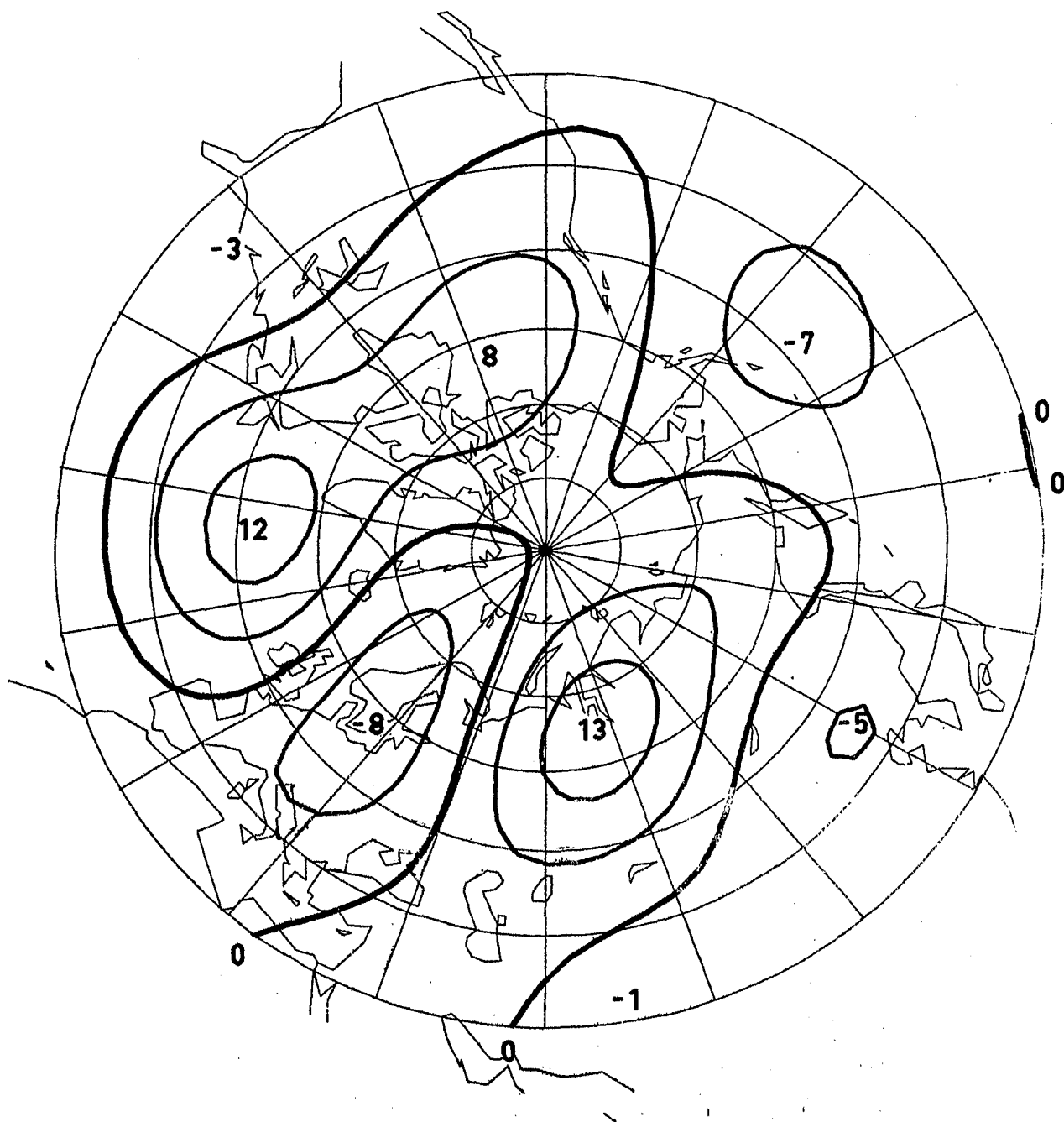
		natürliche Orthogonalfunktion der Ordnung							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Land-Meer-Verteilung	100 r	-33	+20	+ 8	-20	+26	+ 8	+26	- 9
	n	2	2	8	3	9	12	7	3
Orographie	100 r	-17	+12	-15	+20	+29	+13	-23	-16
	n	3	4	4	5	9	5	7	6
Strahlungsbilanz	100 r	+94	-38	-19	+22	+21	- 7	-10	-14
	n	3	2	8	3	2	5	2	2
absorbierte Sonnenstrahlung	100 r	+96	-40	-22	+23	+24	- 7	-11	-13
	n	3	7	7	4	11	6	4	2
langwellige Ausstrahlung	100 r	+90	-41	-31	+29	+26	- 7	-22	-23
	n	2	6	4	4	5	6	5	7
Albedo	100 r	-94	+41	+36	-27	-21	+ 6	+15	-13
	n	2	6	7	4	2	6	4	2



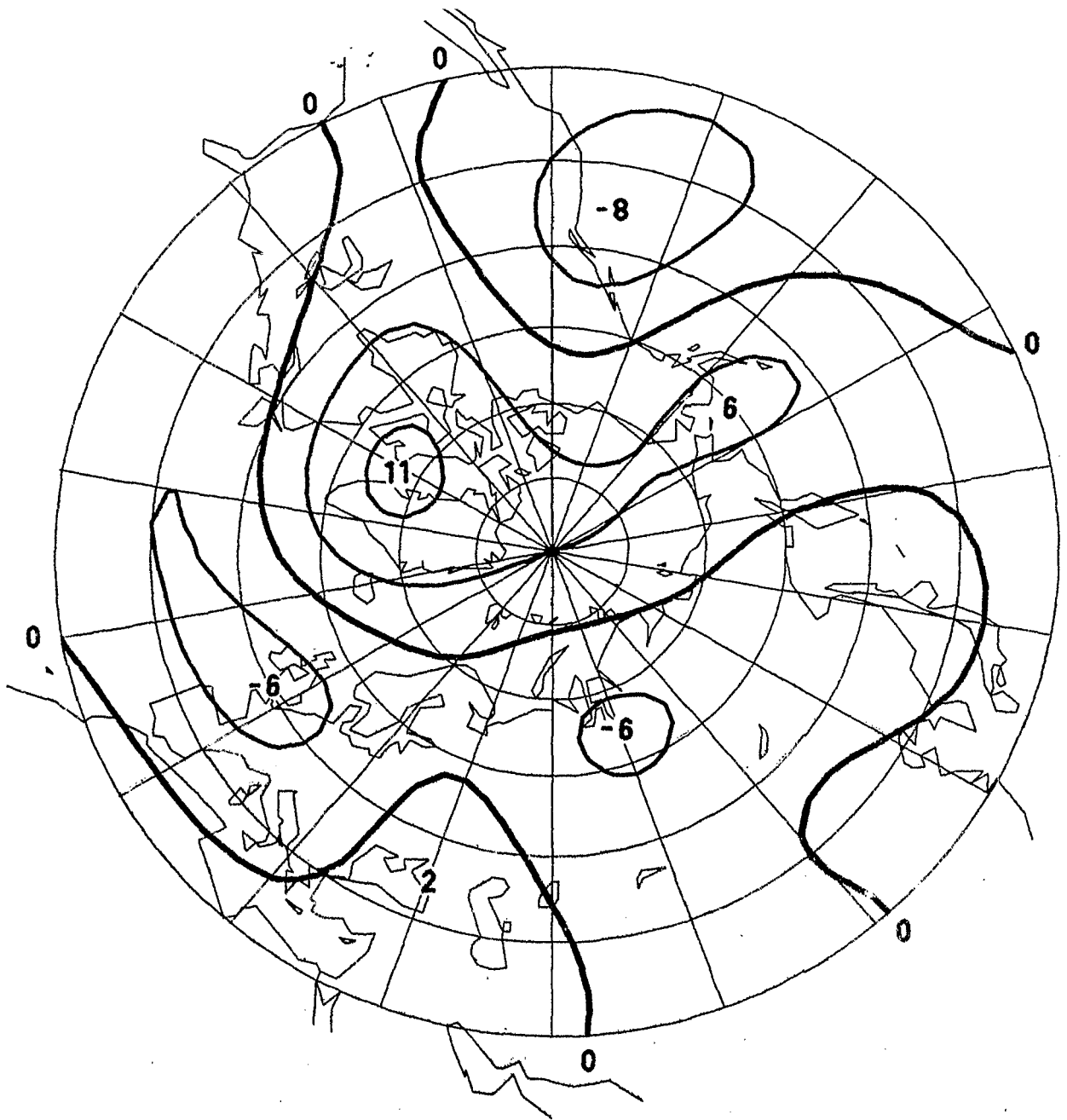
Die Eigenwerte (Gewichte der natürlichen Orthogonalfunktion) als Funktion ihrer Ordnungsnummer in logarithmischer Darstellung



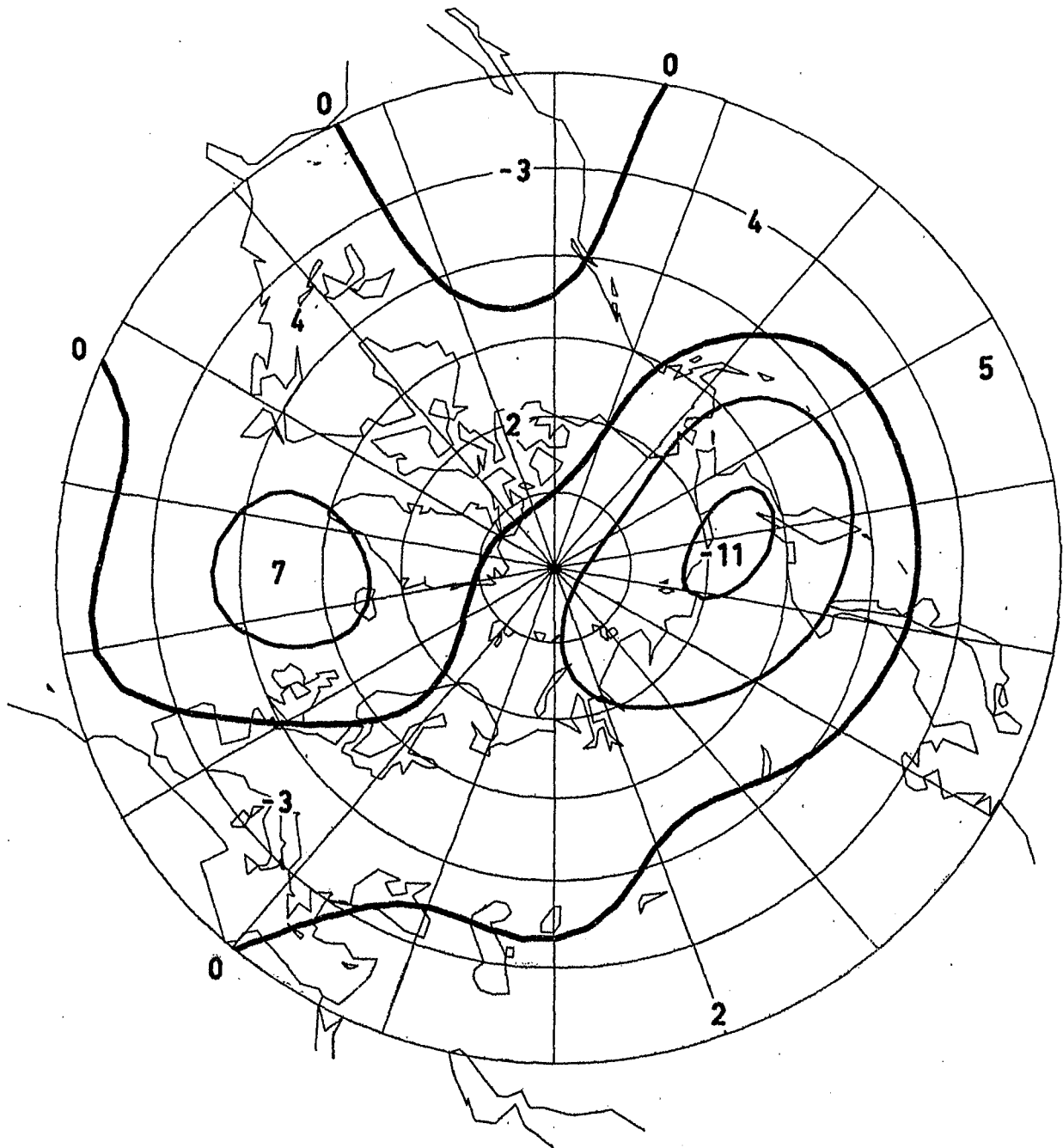
1. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



2. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM

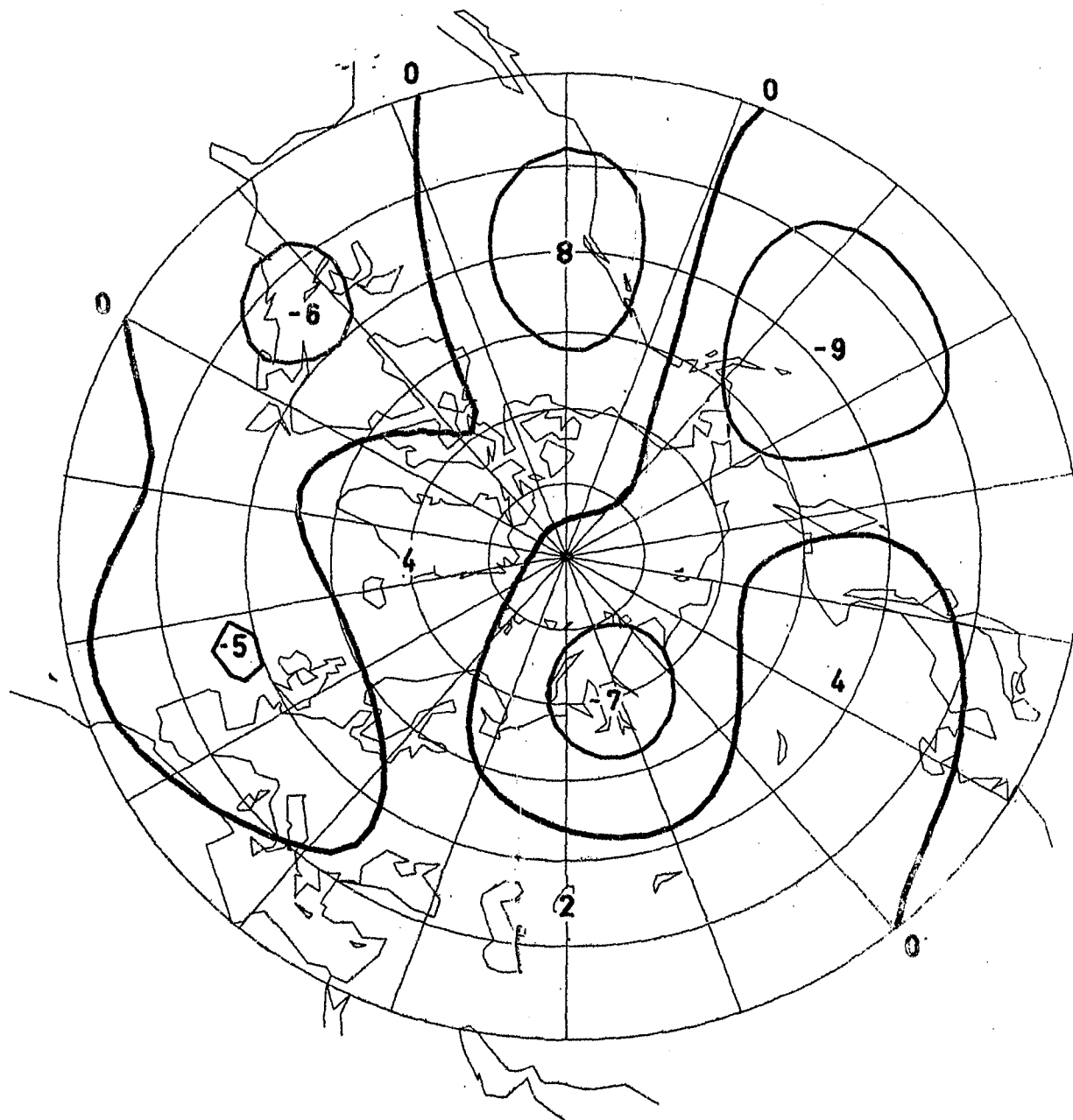


3. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM

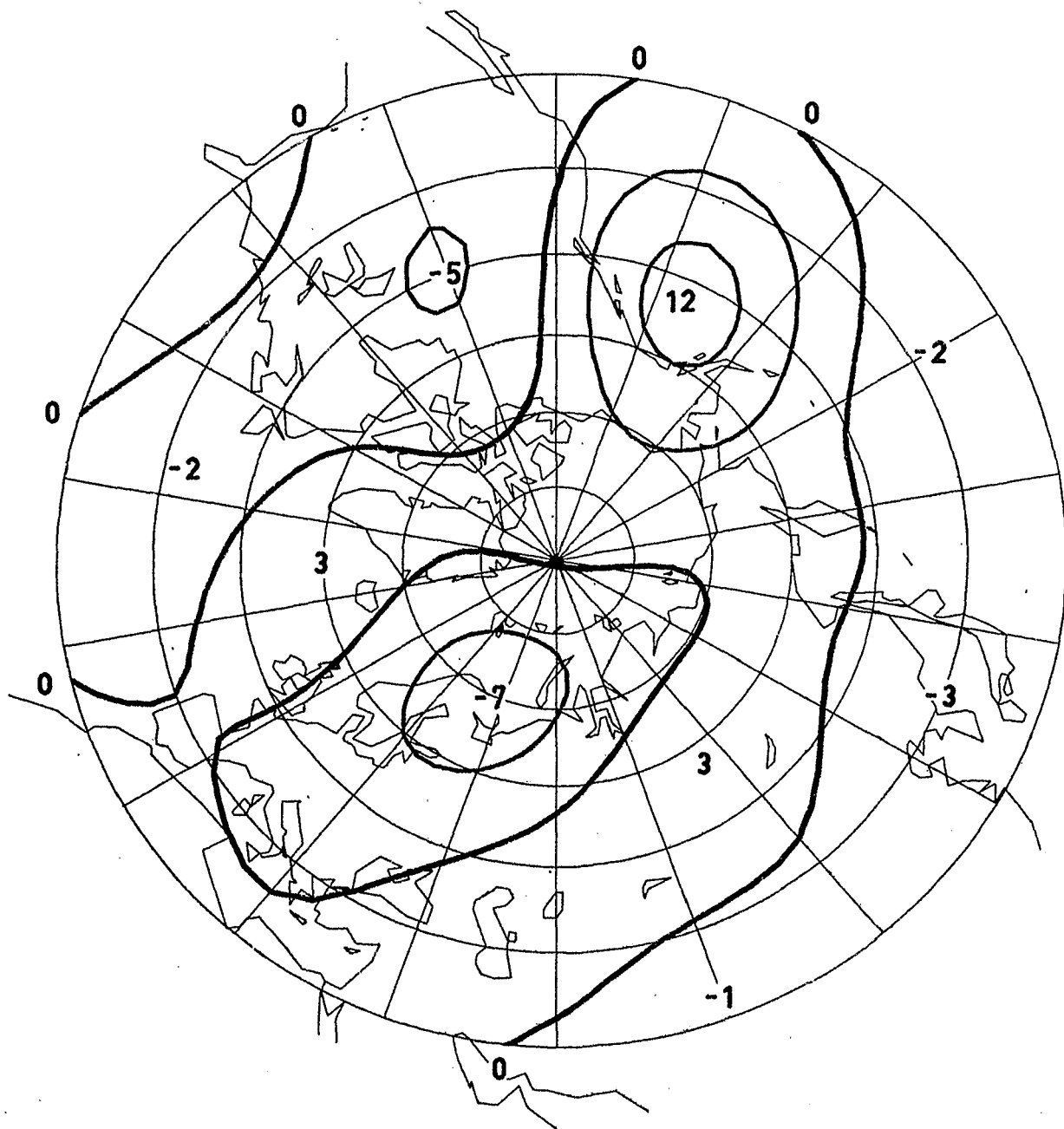


4. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM

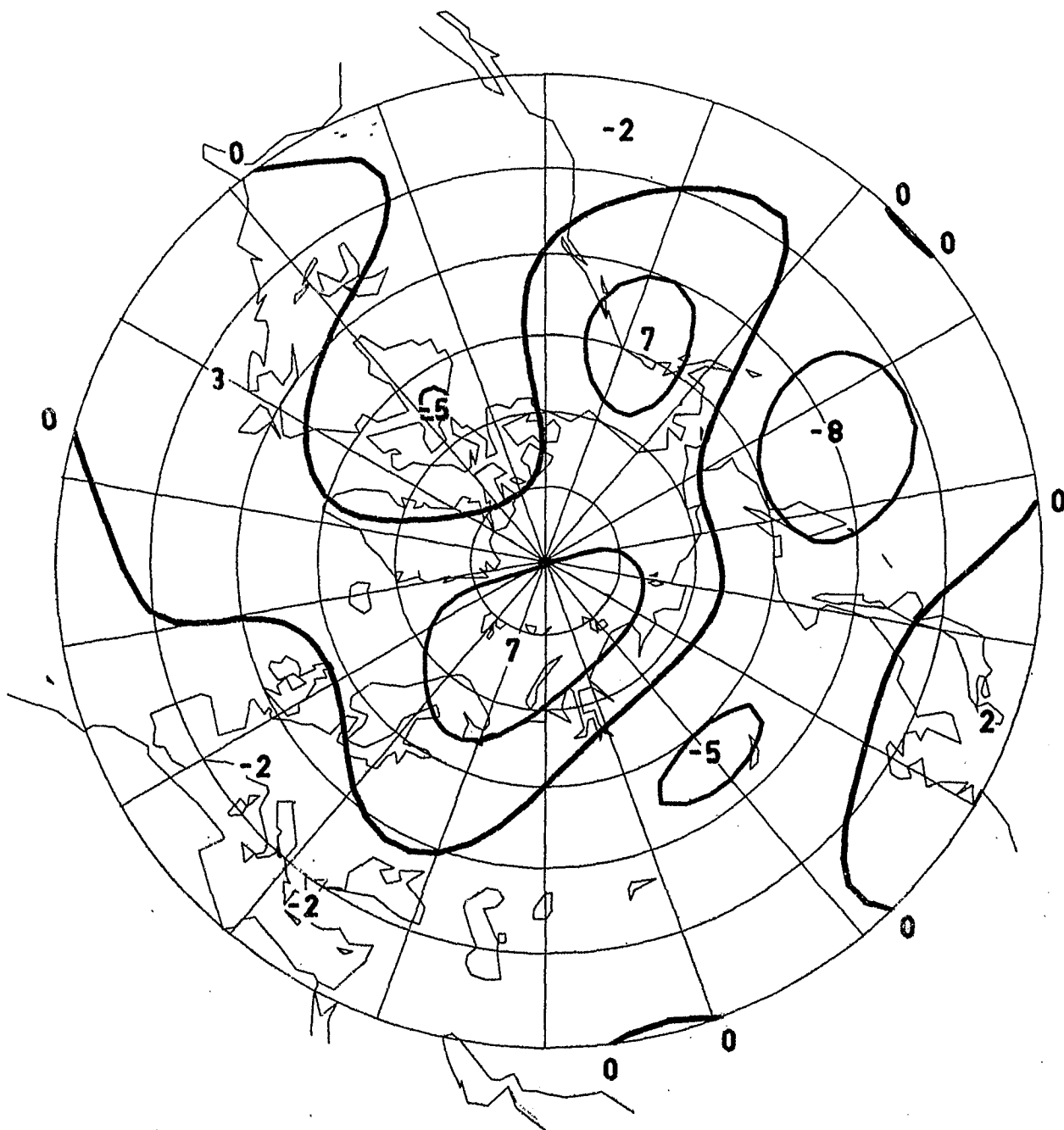
Abb. 5



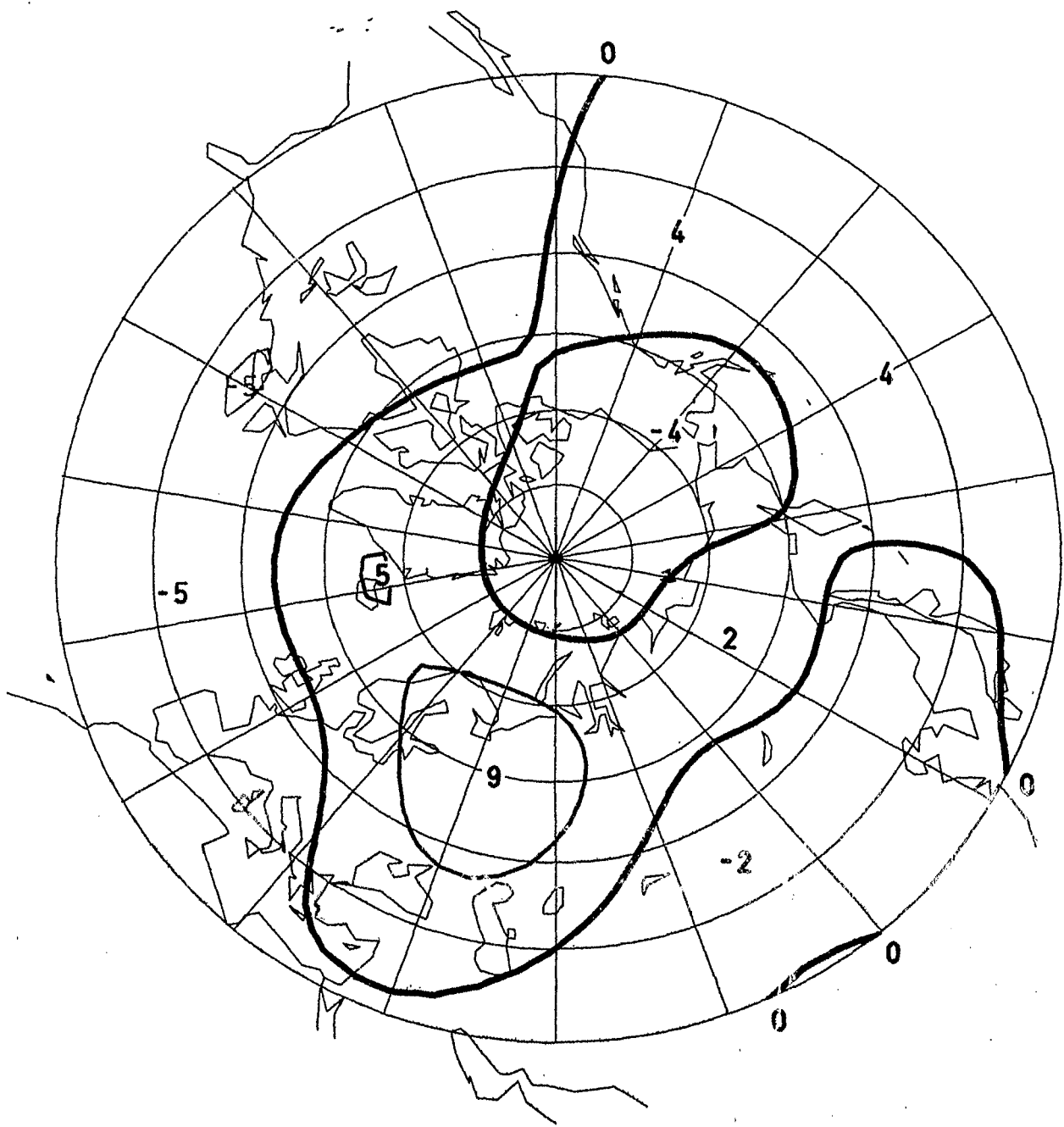
5. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FÜR DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELÖST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



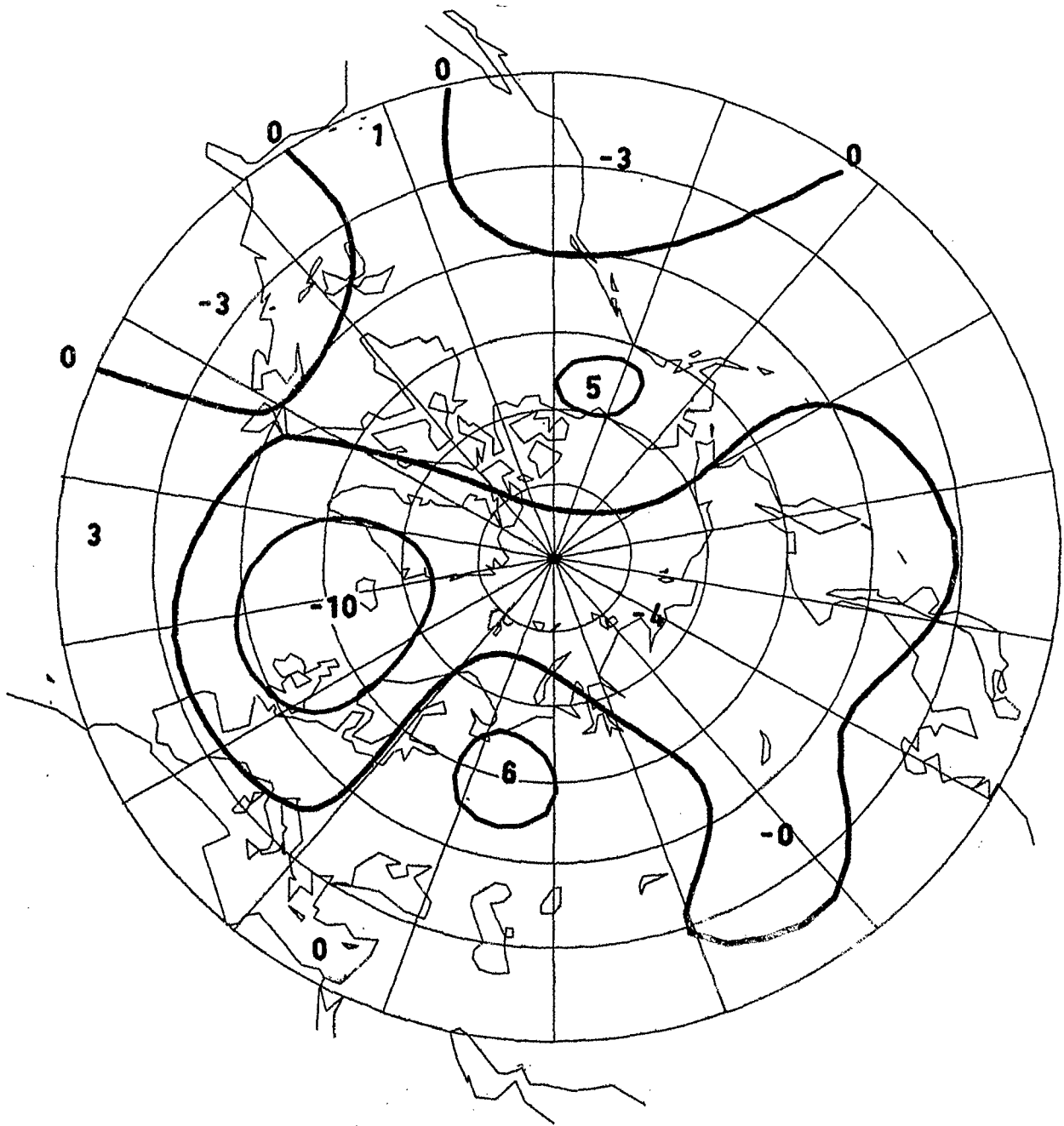
6. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLÄCHE
 FÜR DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELÖST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



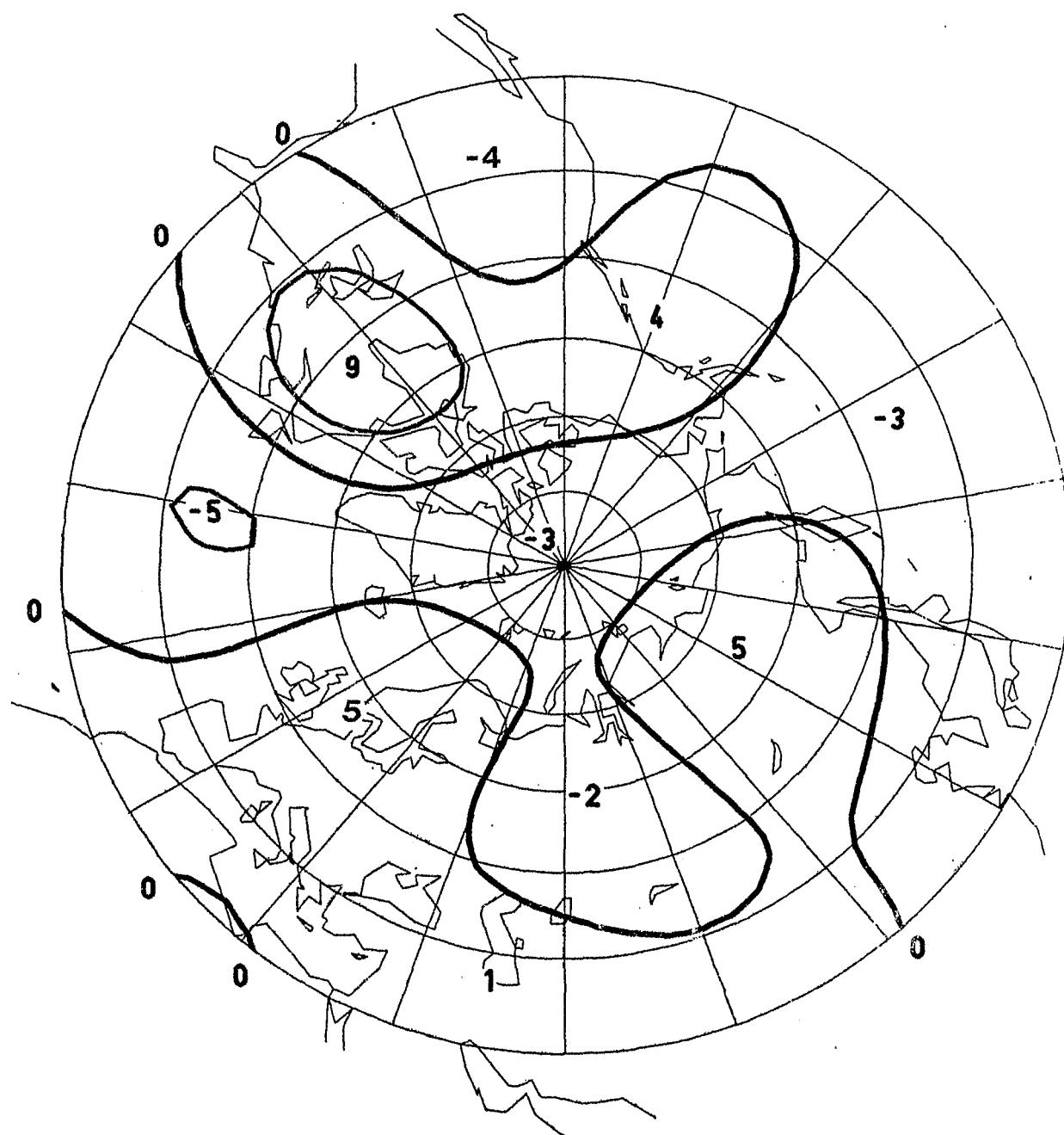
**7. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM**



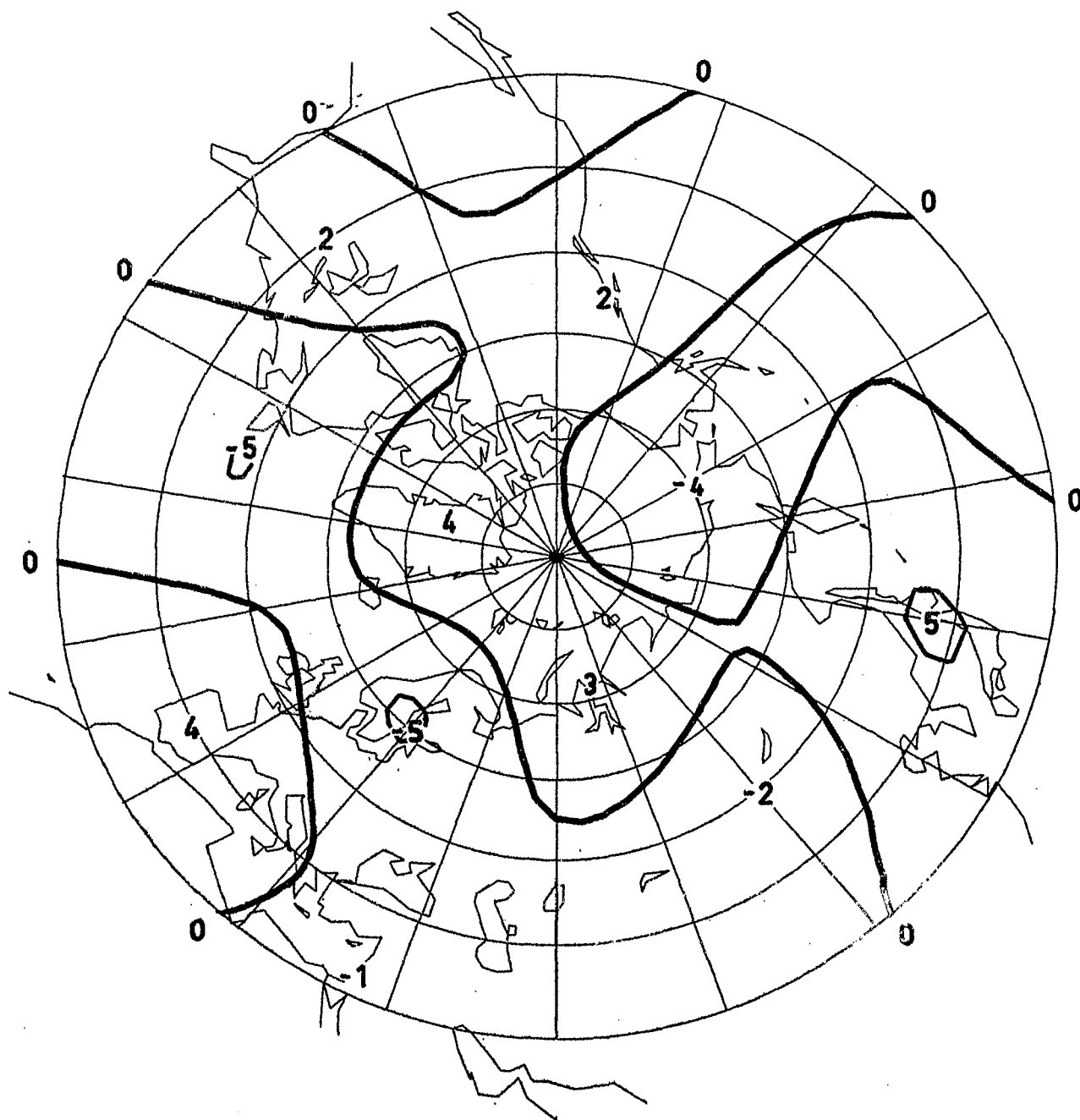
8. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



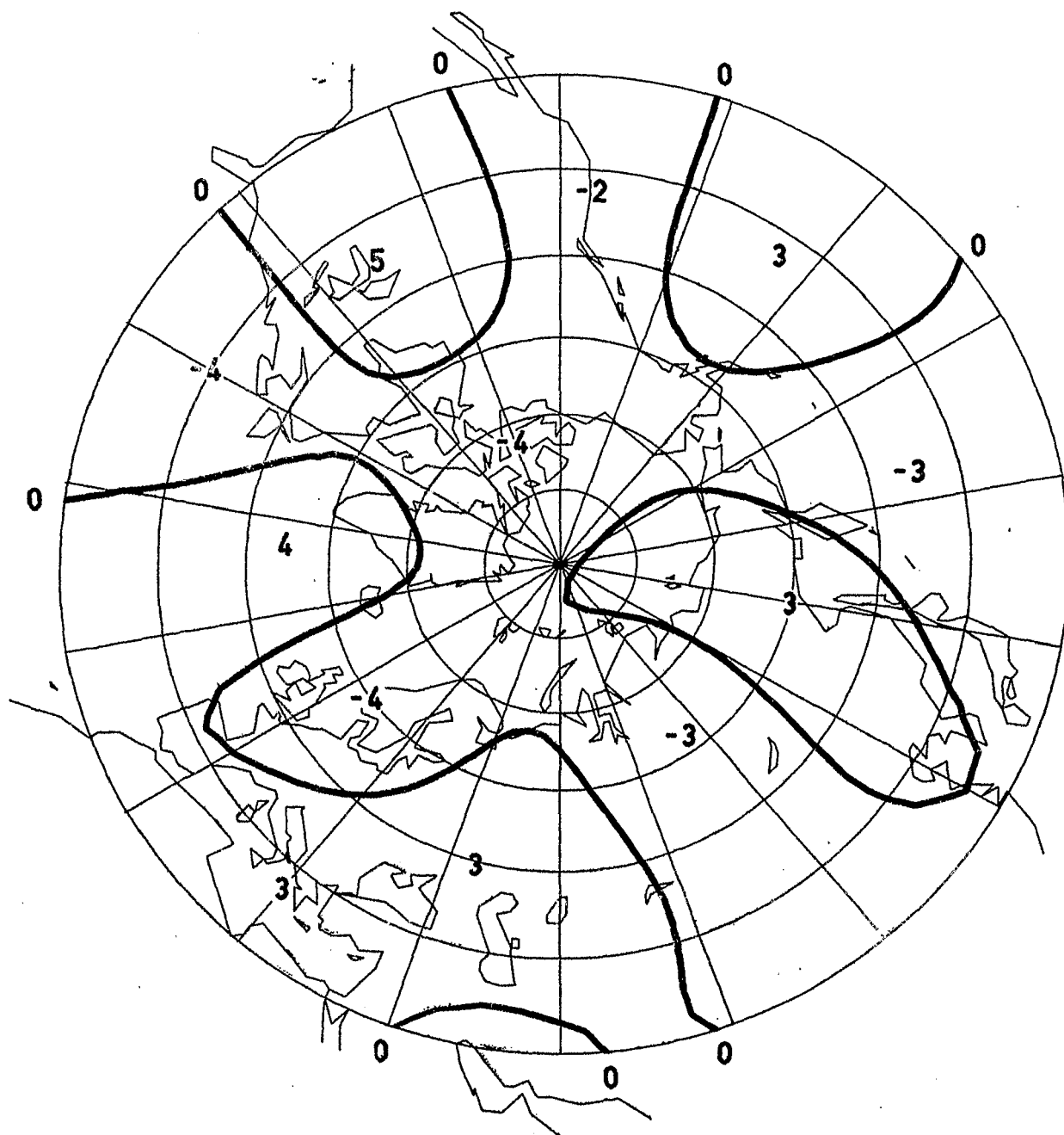
9. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



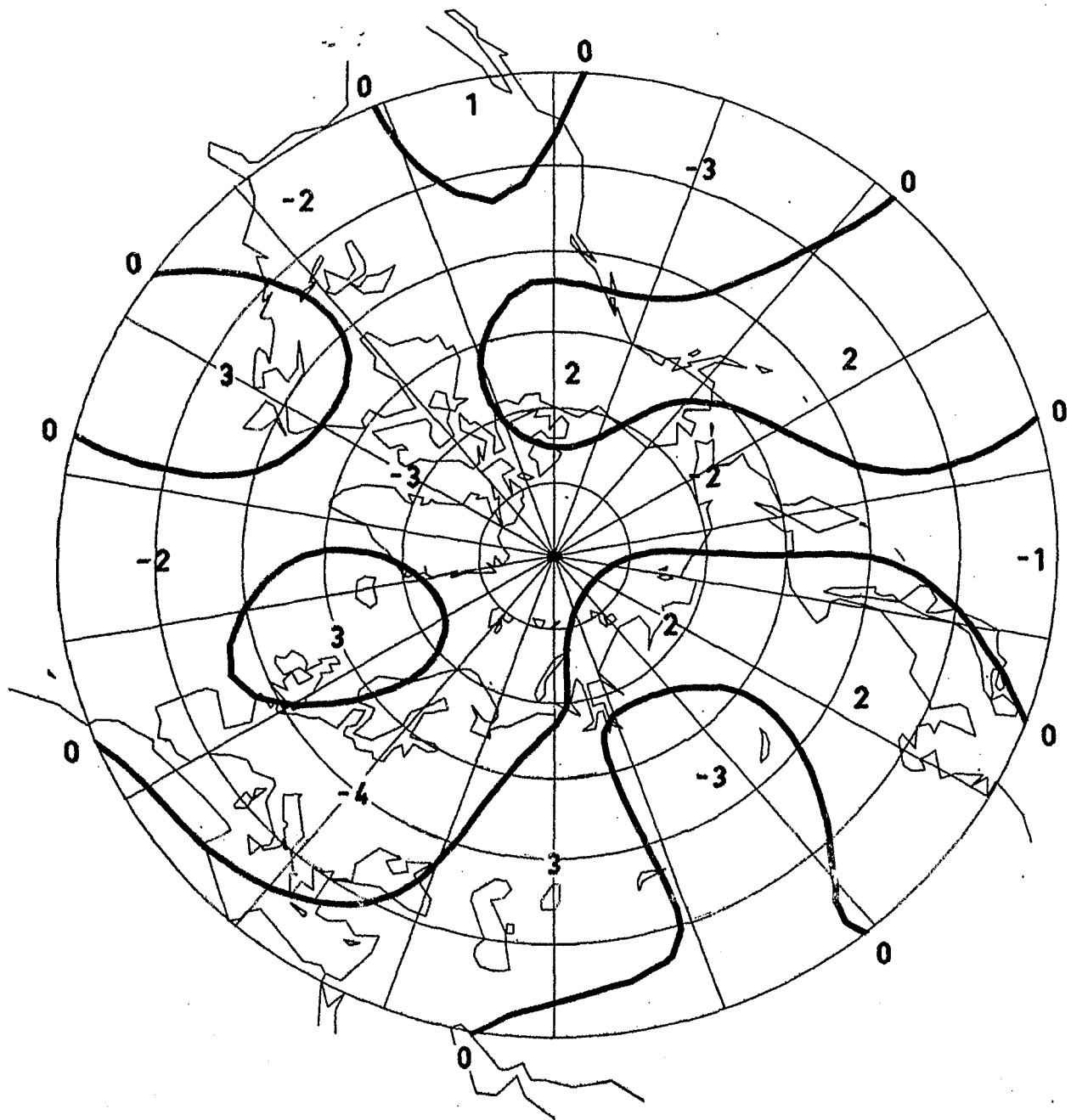
10. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



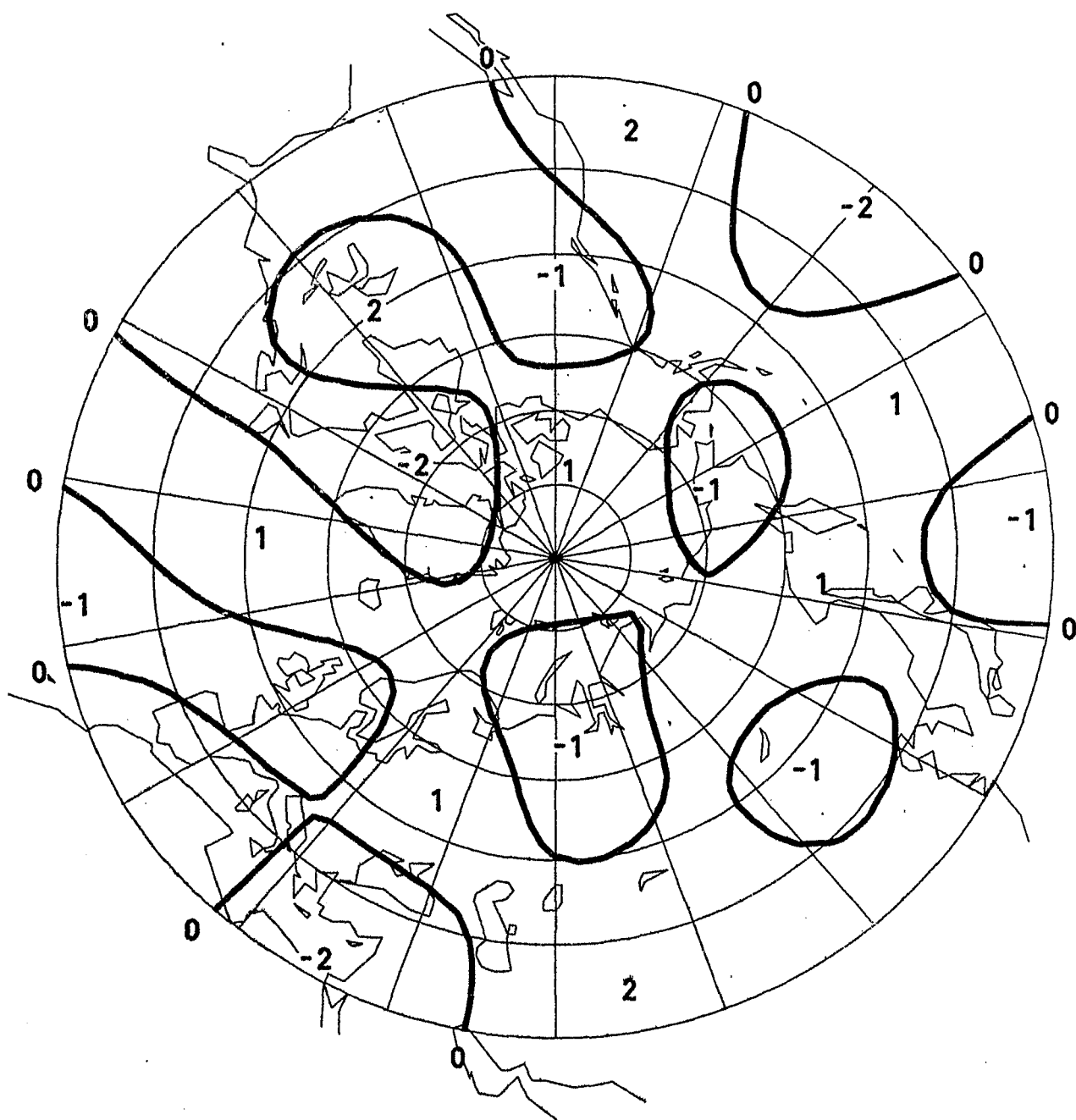
12. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FÜR DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELÖST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



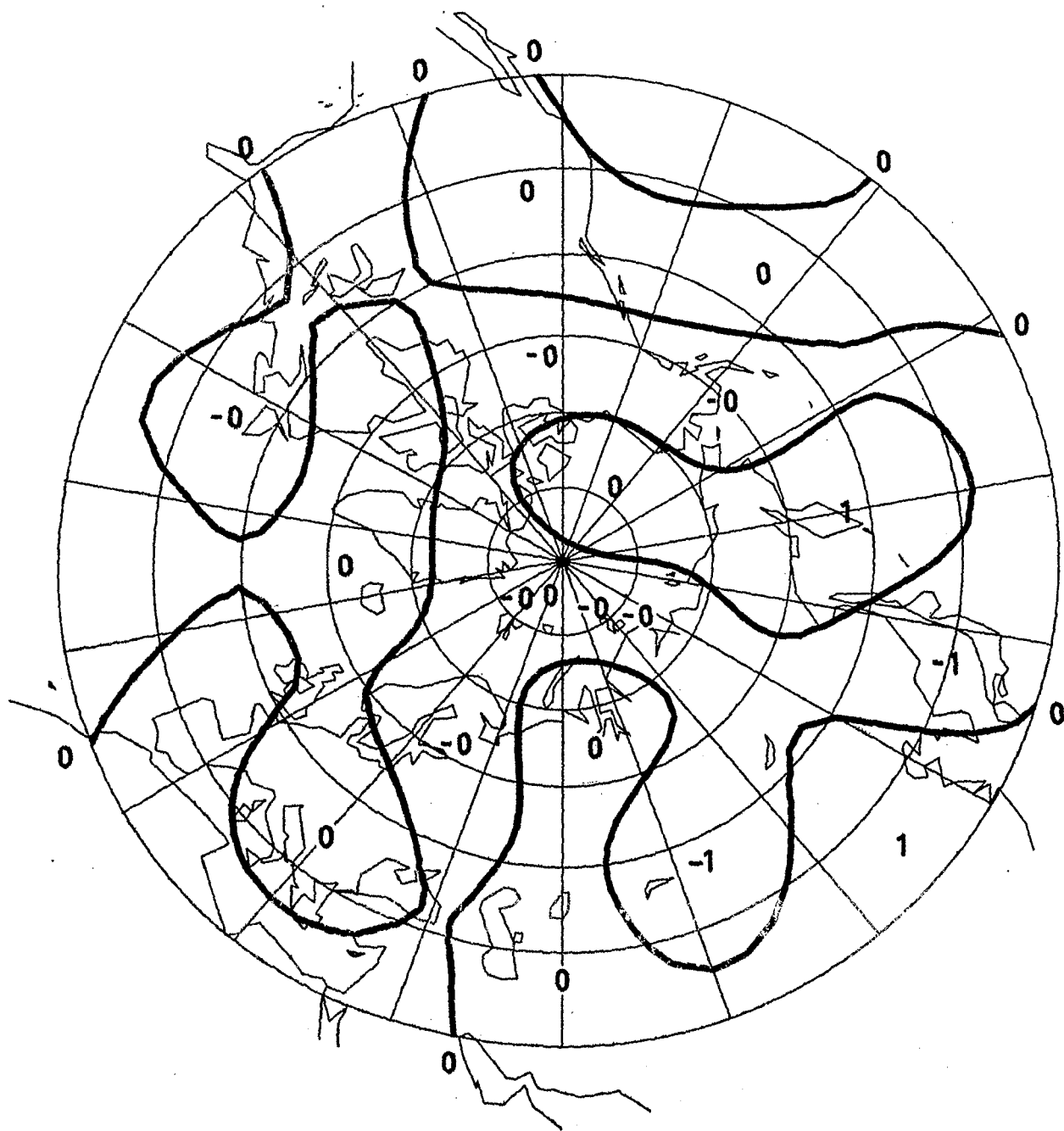
16. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



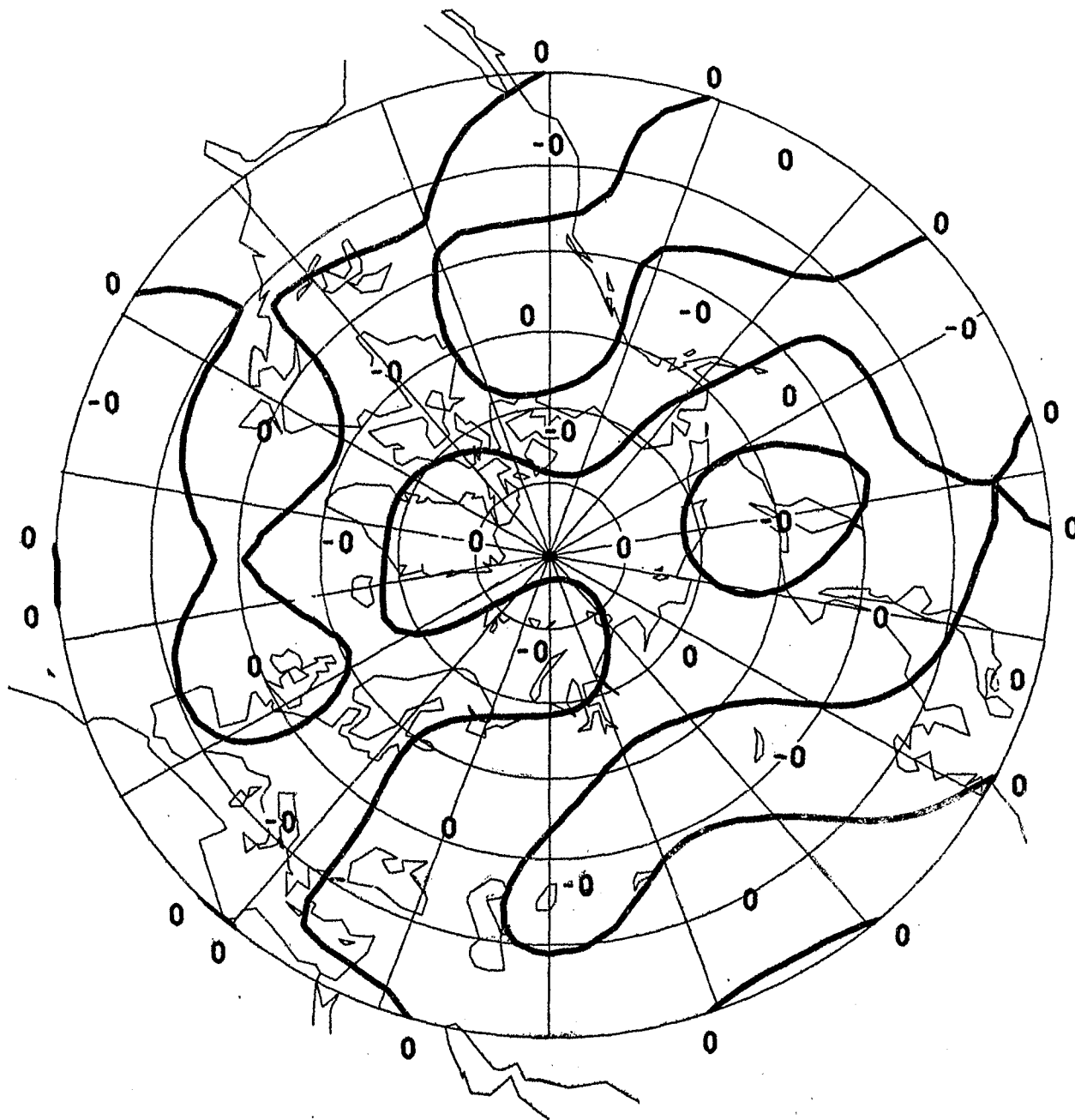
20. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



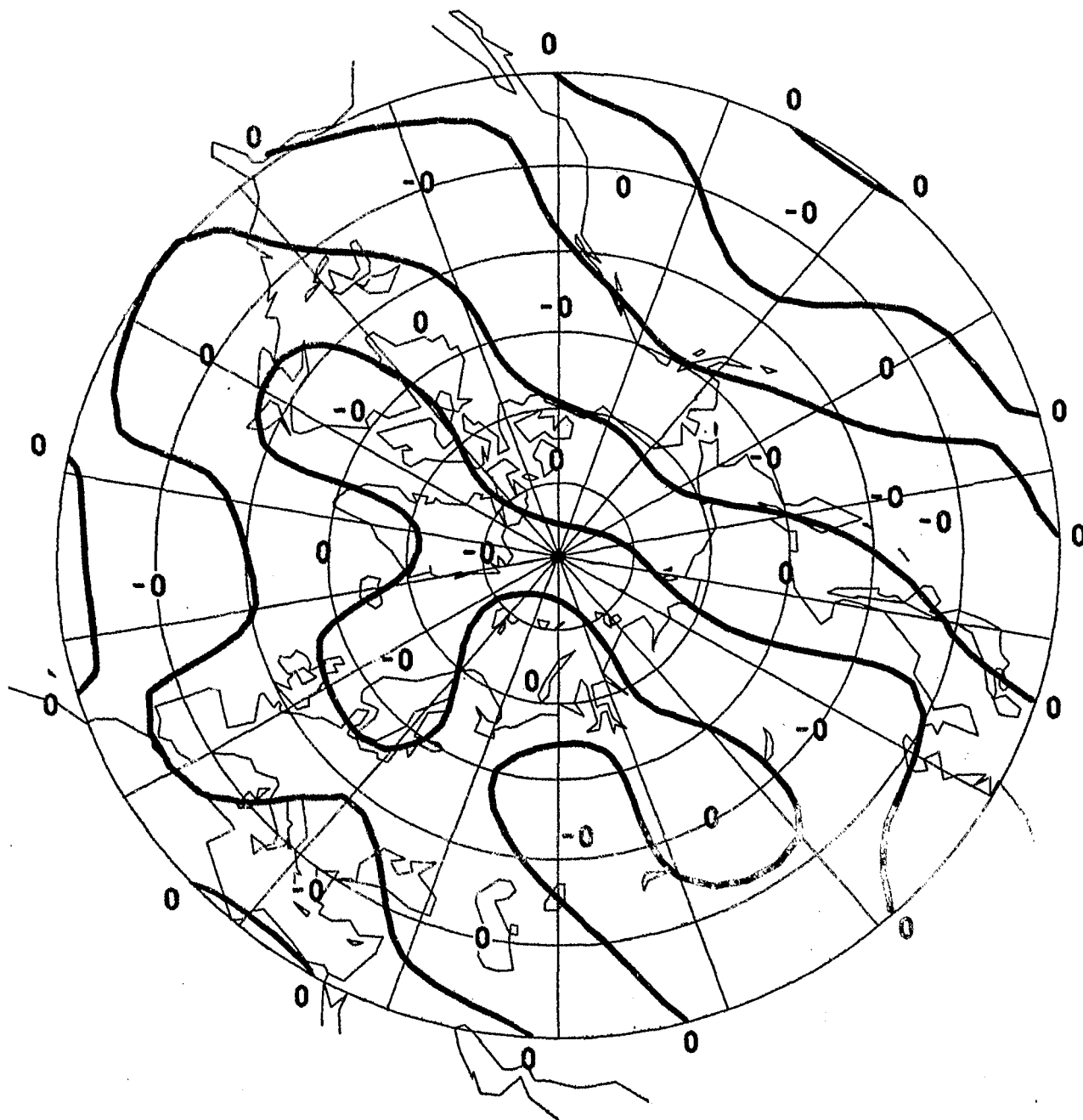
32. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



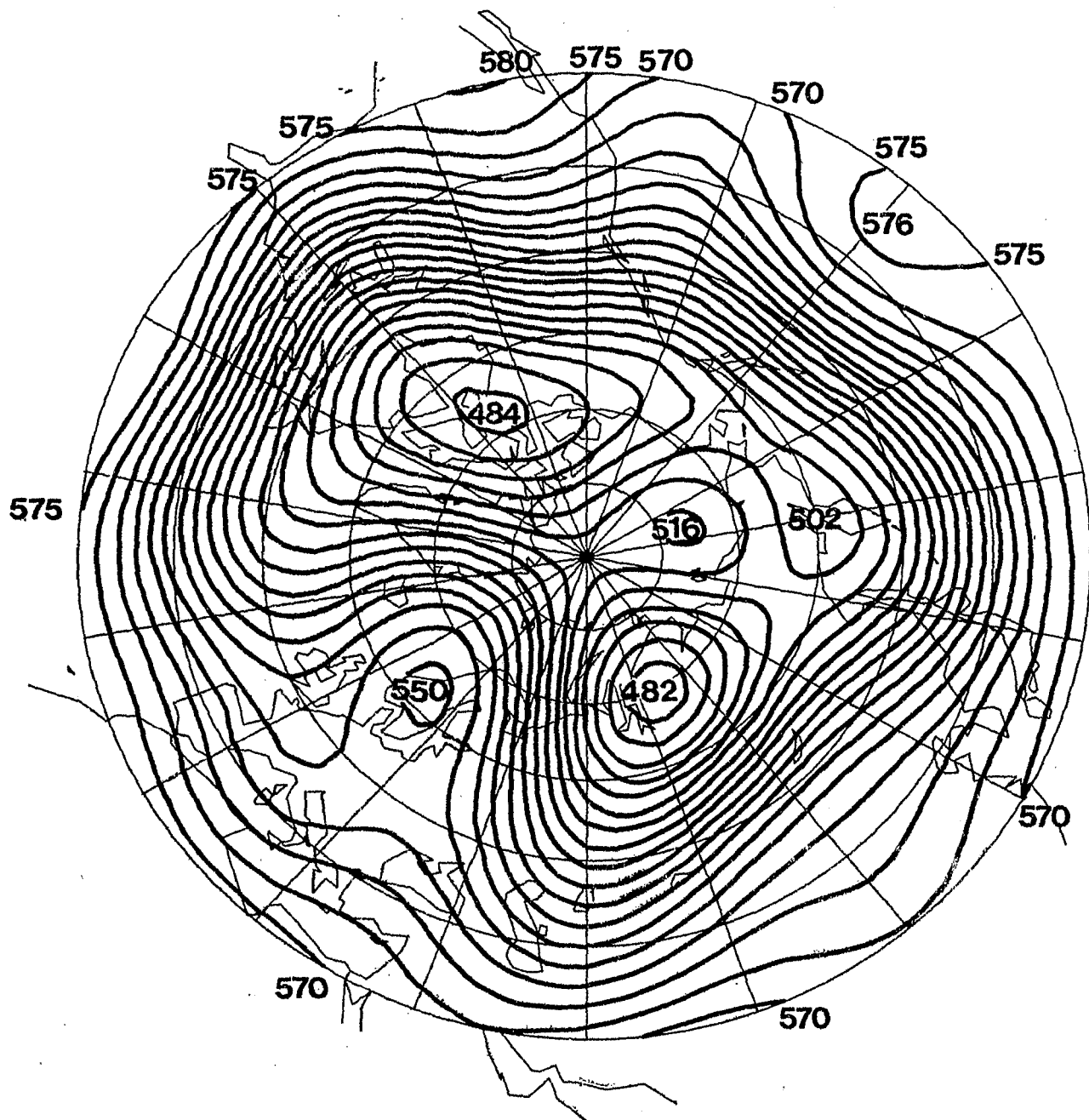
48. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM.



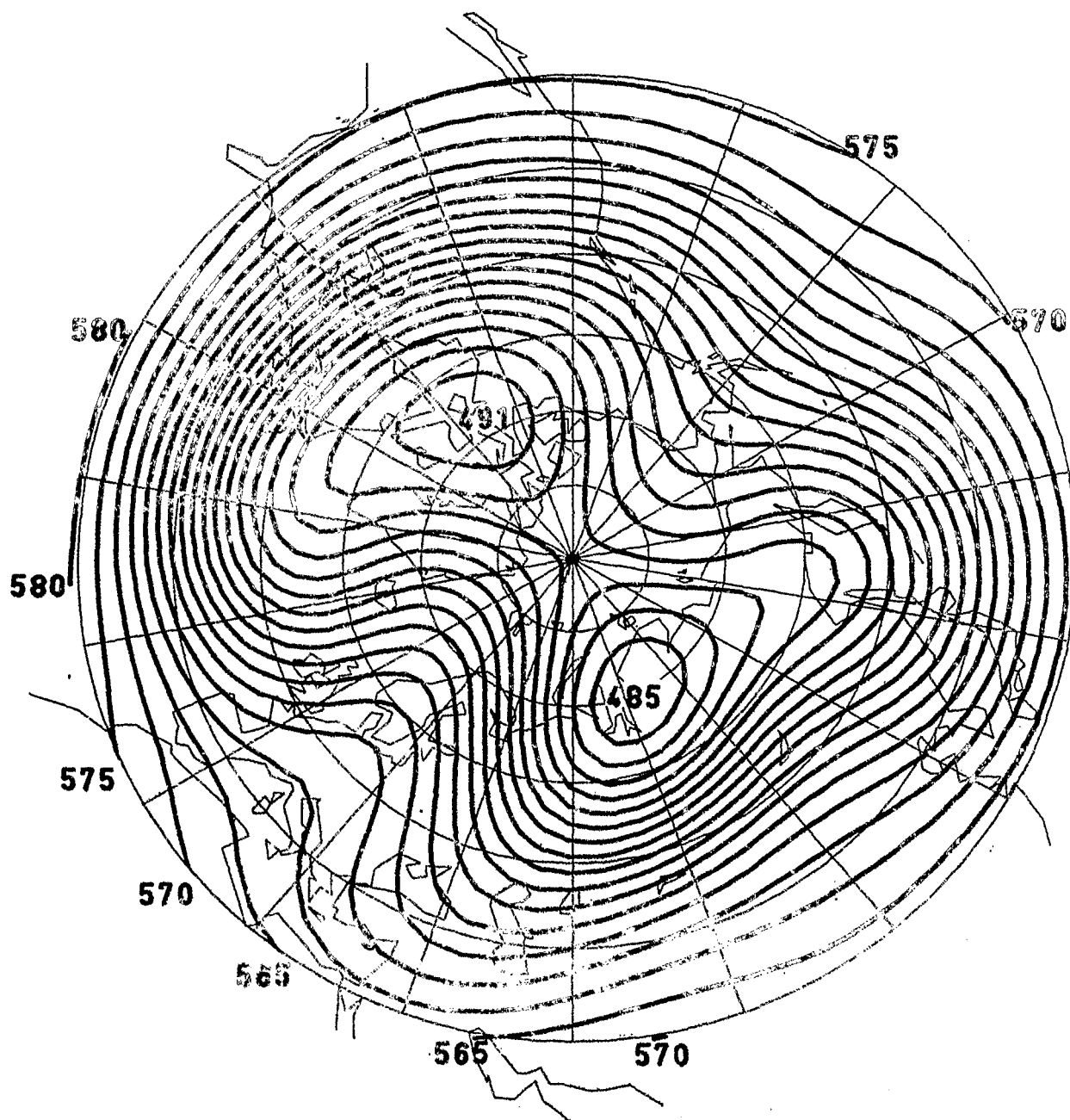
64. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



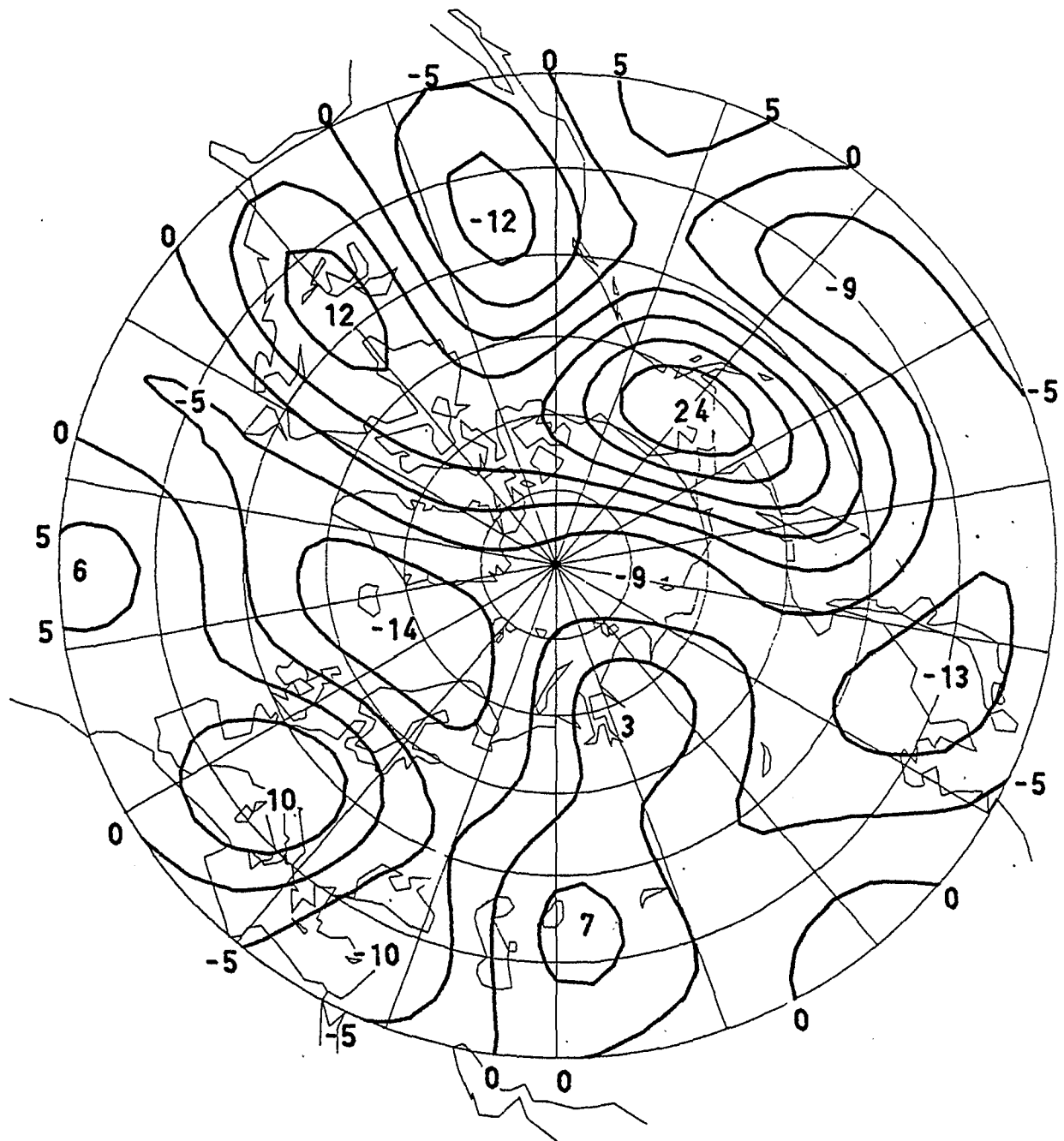
72. NAT. ORTHOGONALFUNKTION DER 500-MB-FLAECHE
 FUEER DEN WINTER (DEZEMBER, JANUAR, FEBRUAR),
 AUFGELOEST BIS ZUR WELLENZAHL: 12 IN 10 GPM



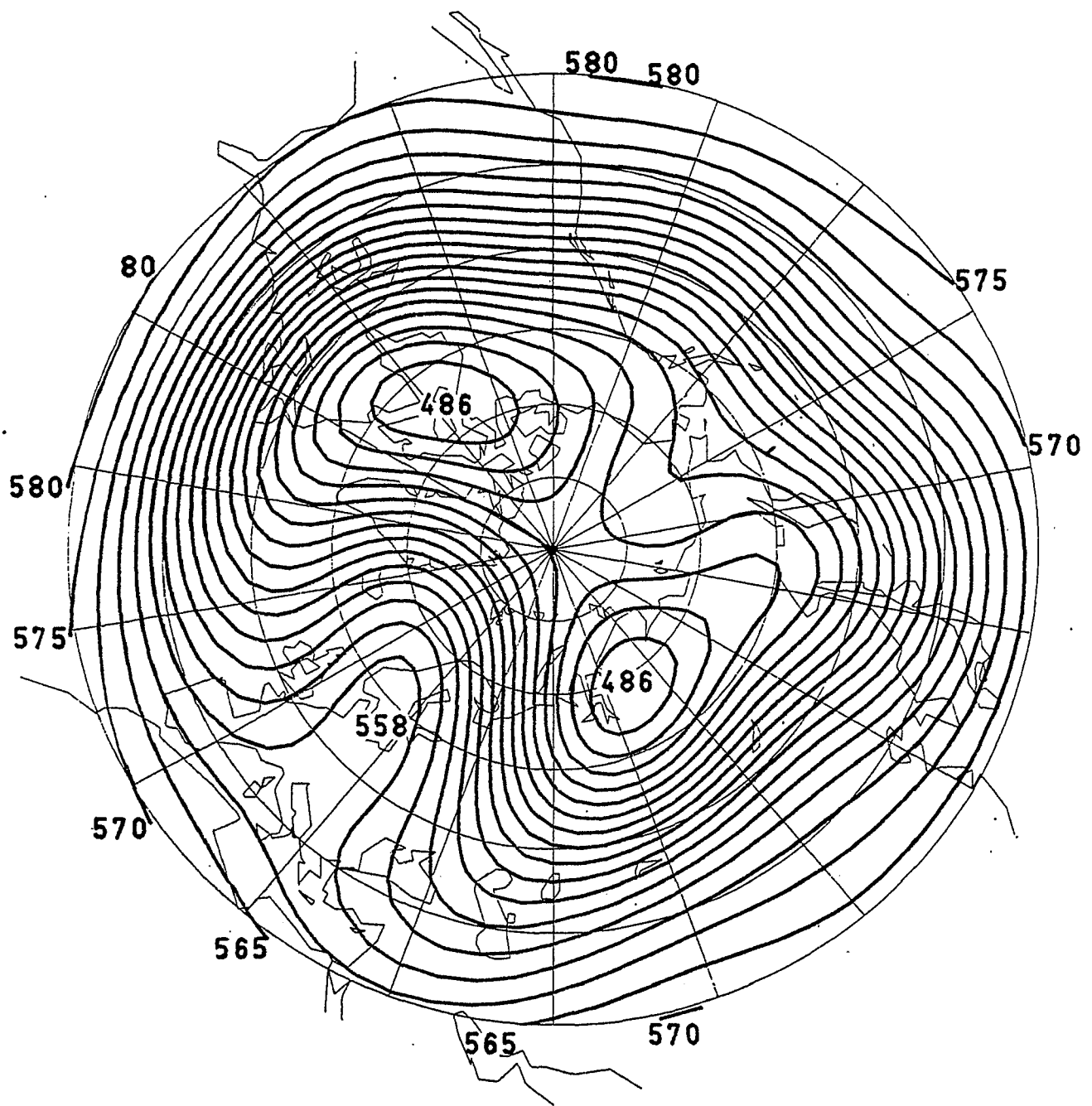
Höhe der 500 - mb - Fläche in 10 gpm
7. 1. 72 12 GMT
aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



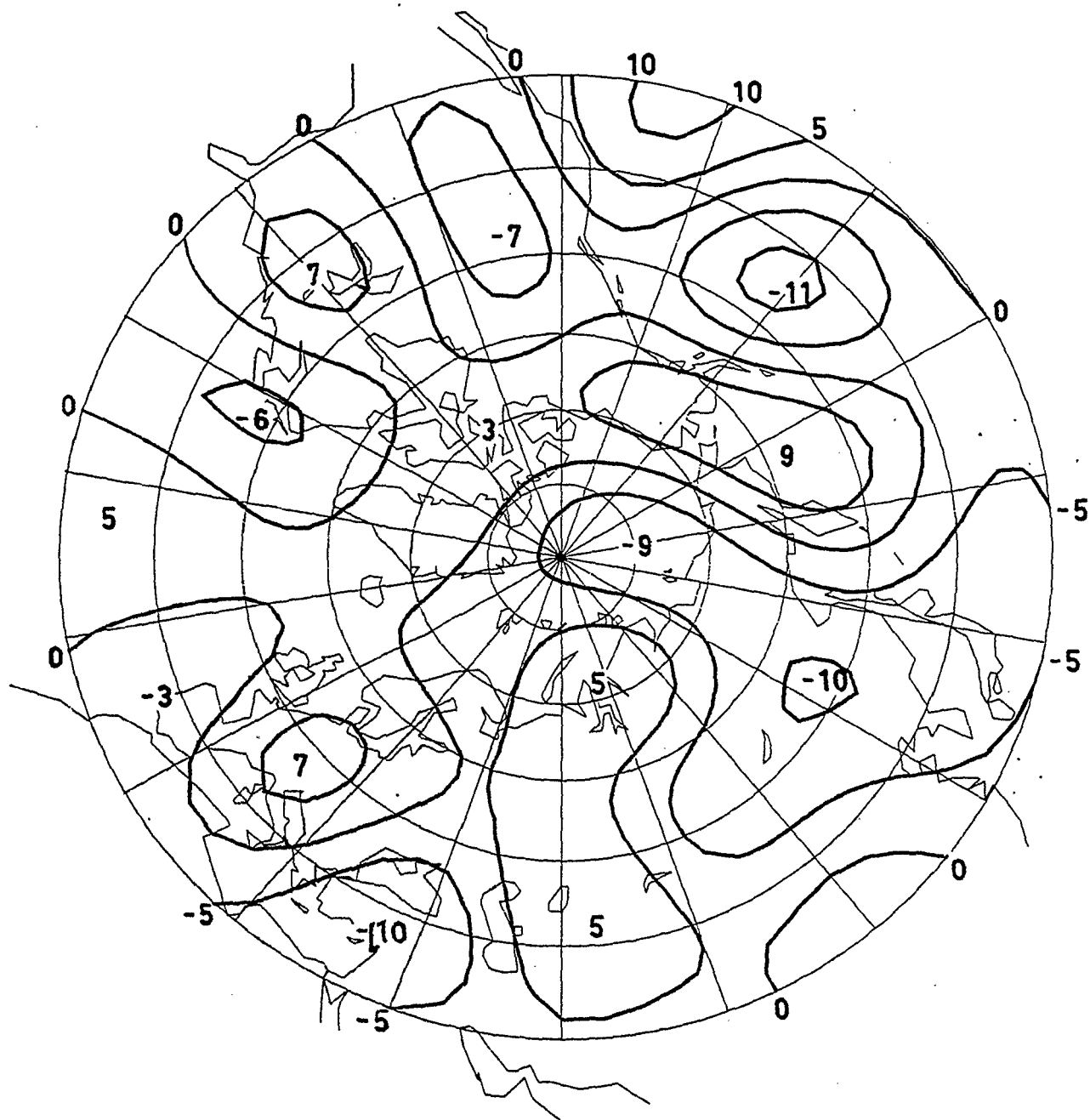
1. BIS 2. NATÜRLICHE Orthogonalfunktion der
 Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
 7. 1. 72 12 GMT
 aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



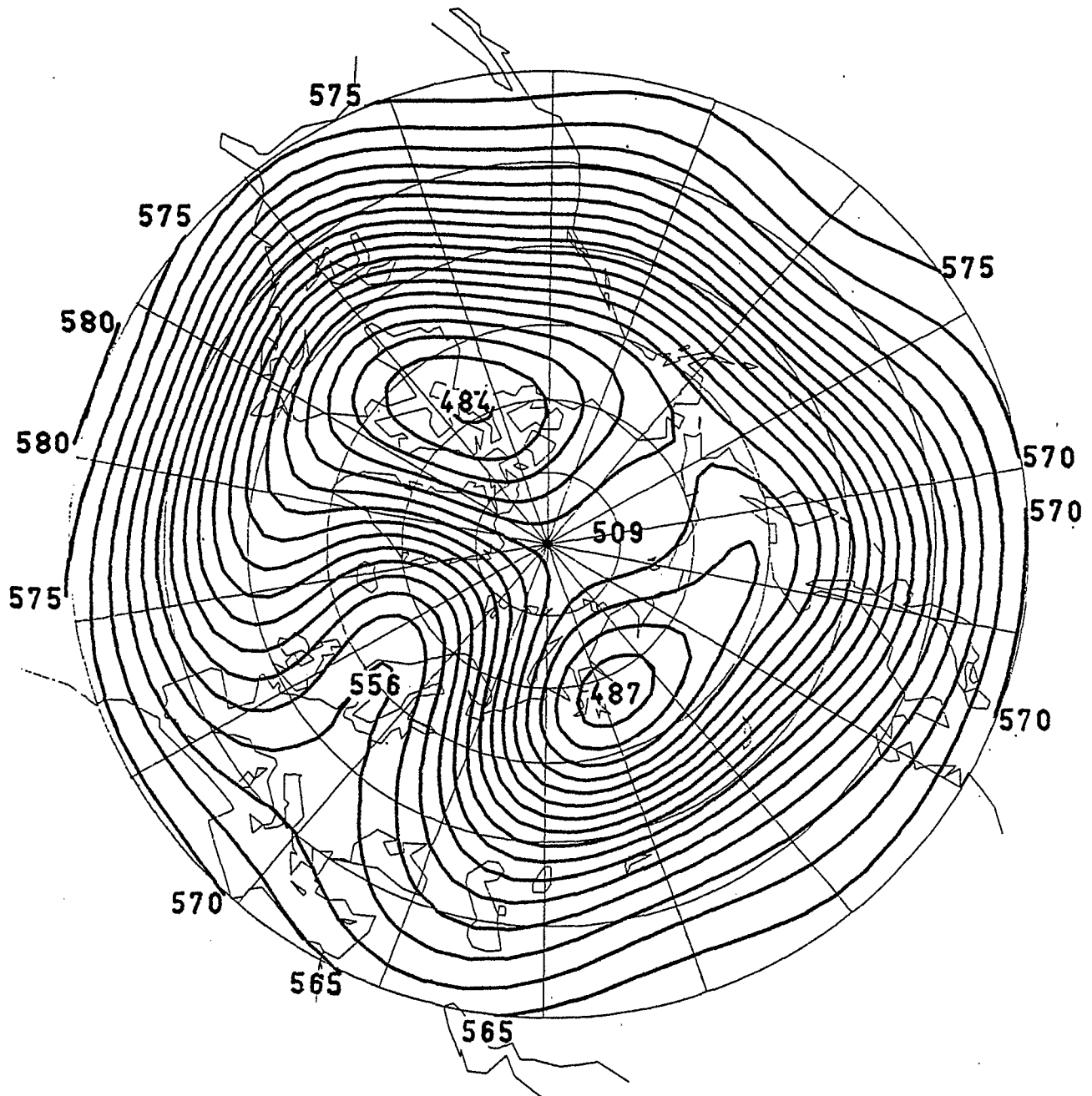
Fehler der
 1. bis 2. natürlichen Orthogonalfunktion der
 Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
 7. 1. 72 12 GMT
 aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



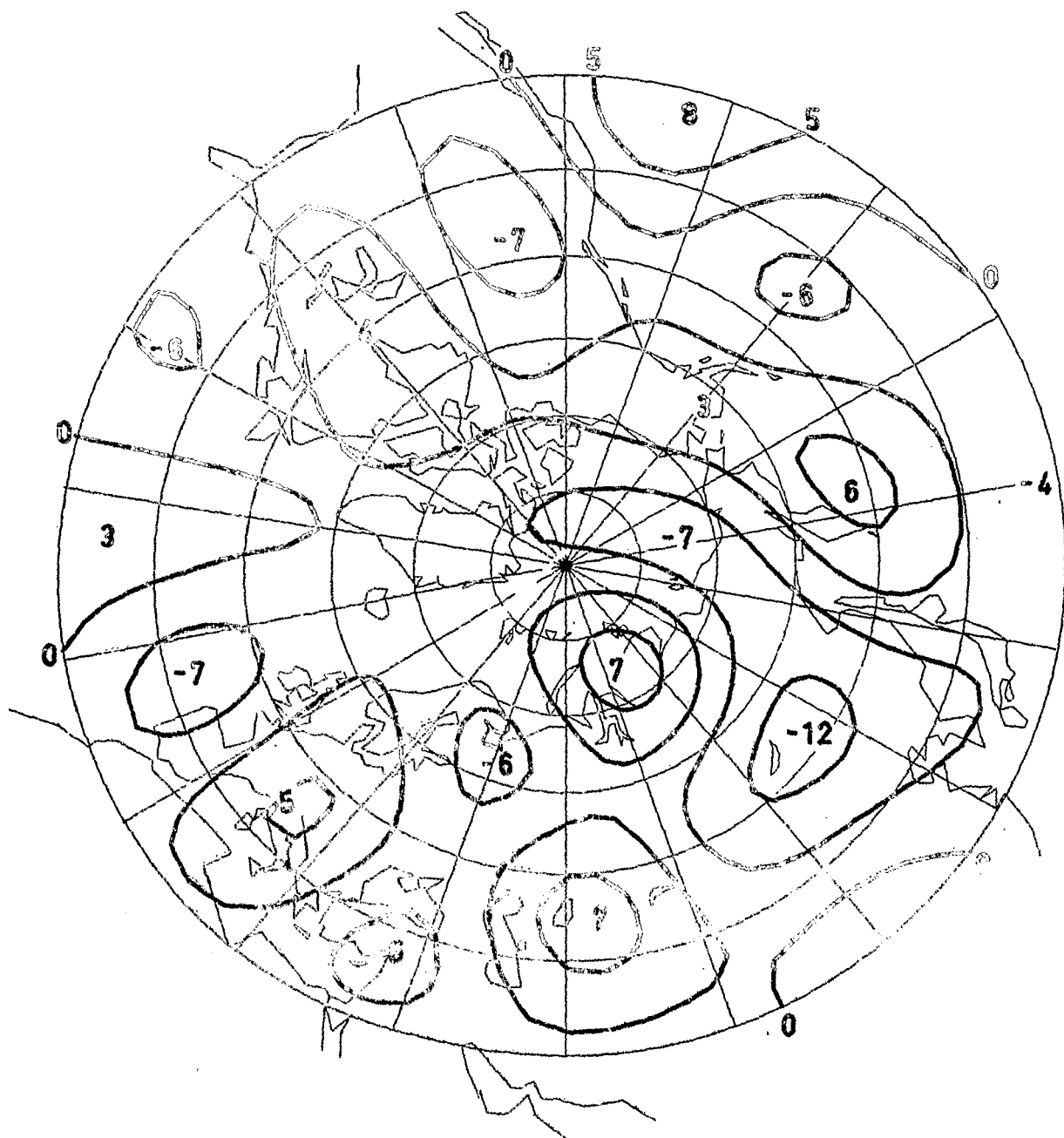
1. BIS 10. NATÜRLICHE Orthogonalfunktion der
Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
7. 1. 72 12 GMT
aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



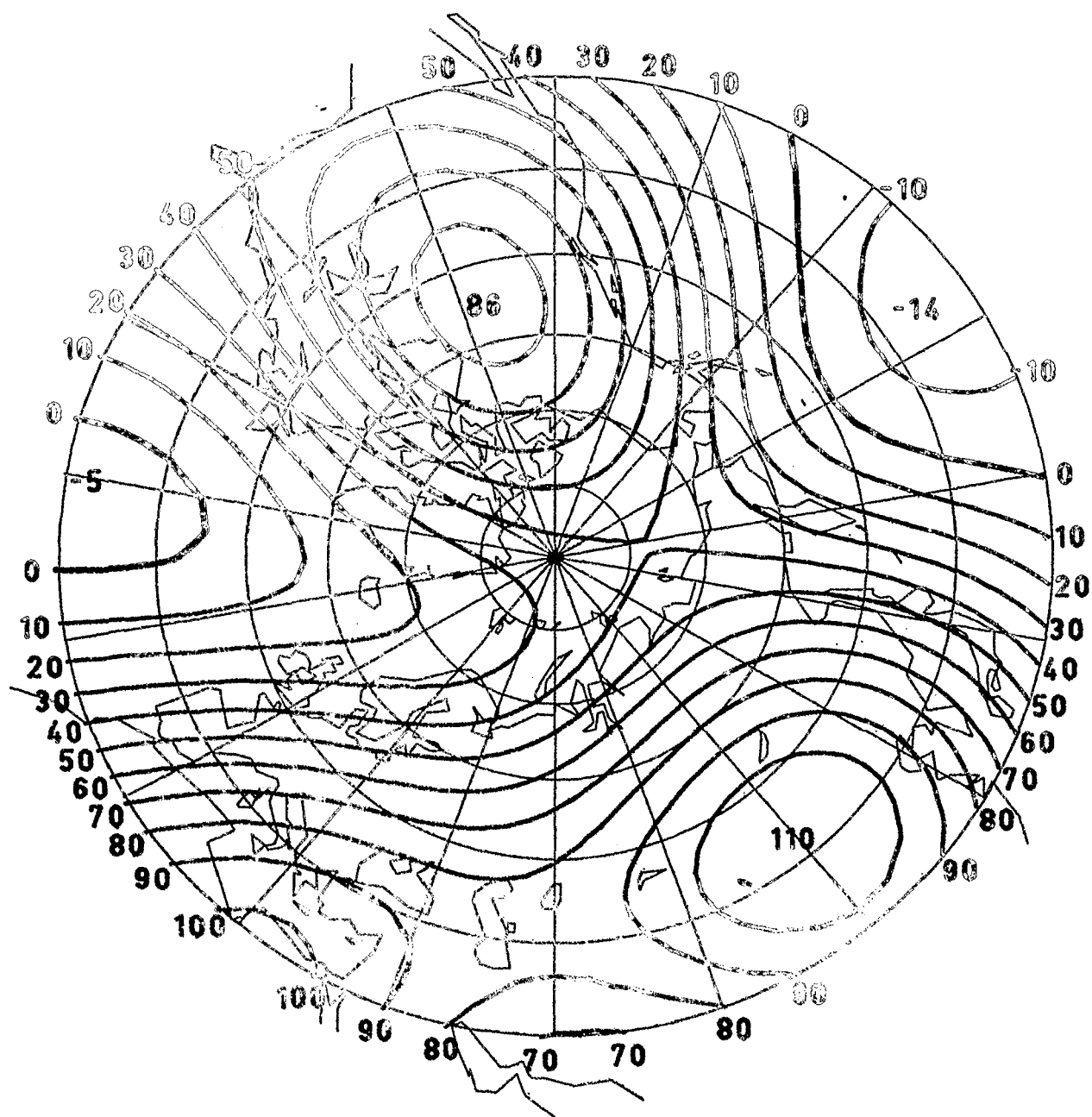
Fehler der
 1. bis 10. natürlichen Orthogonalfunktion der
 Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
 7. 1. 72 12 GMT
 aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



1. BIS 22. NATÜRLICHE Orthogonalfunktion der
Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
7. 1. 72 12 GMT
aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



Fehler der
 1. bis 22. natürlichen Orthogonalfunktion der
 Höhe der 500-mb-Fläche in 10 gpm
 7. 1. 72 12 GMT
 aufgelöst bis zur Wellenzahl: 12



LAND-MEER-VERTEILUNG DER NORDHALBKUGEL IN PROZENT
AM AEQUATOR GESPIEGELT
AUFGELÖST BIS ZUR WELLENZAHL: 5

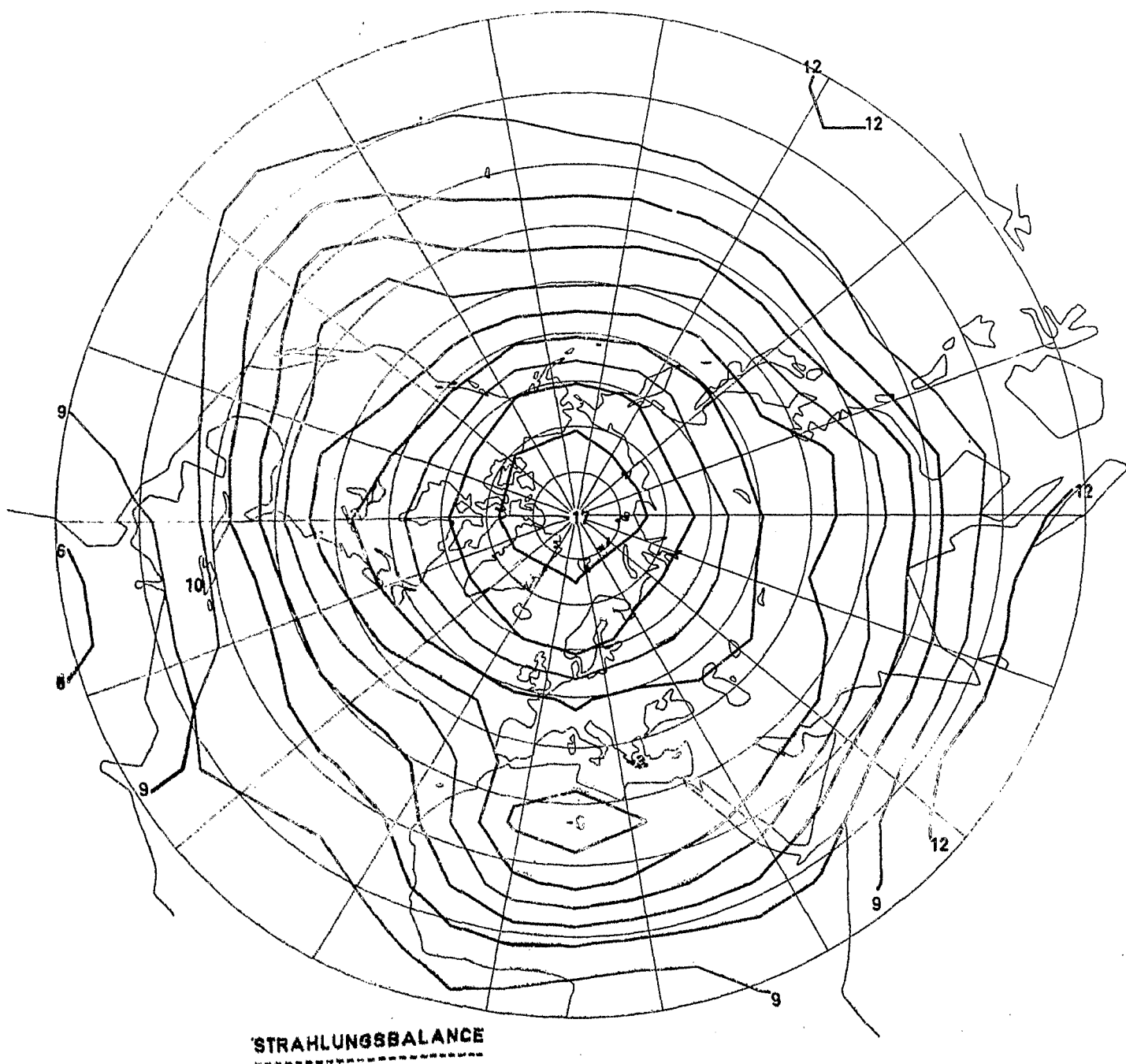


Abb. 27

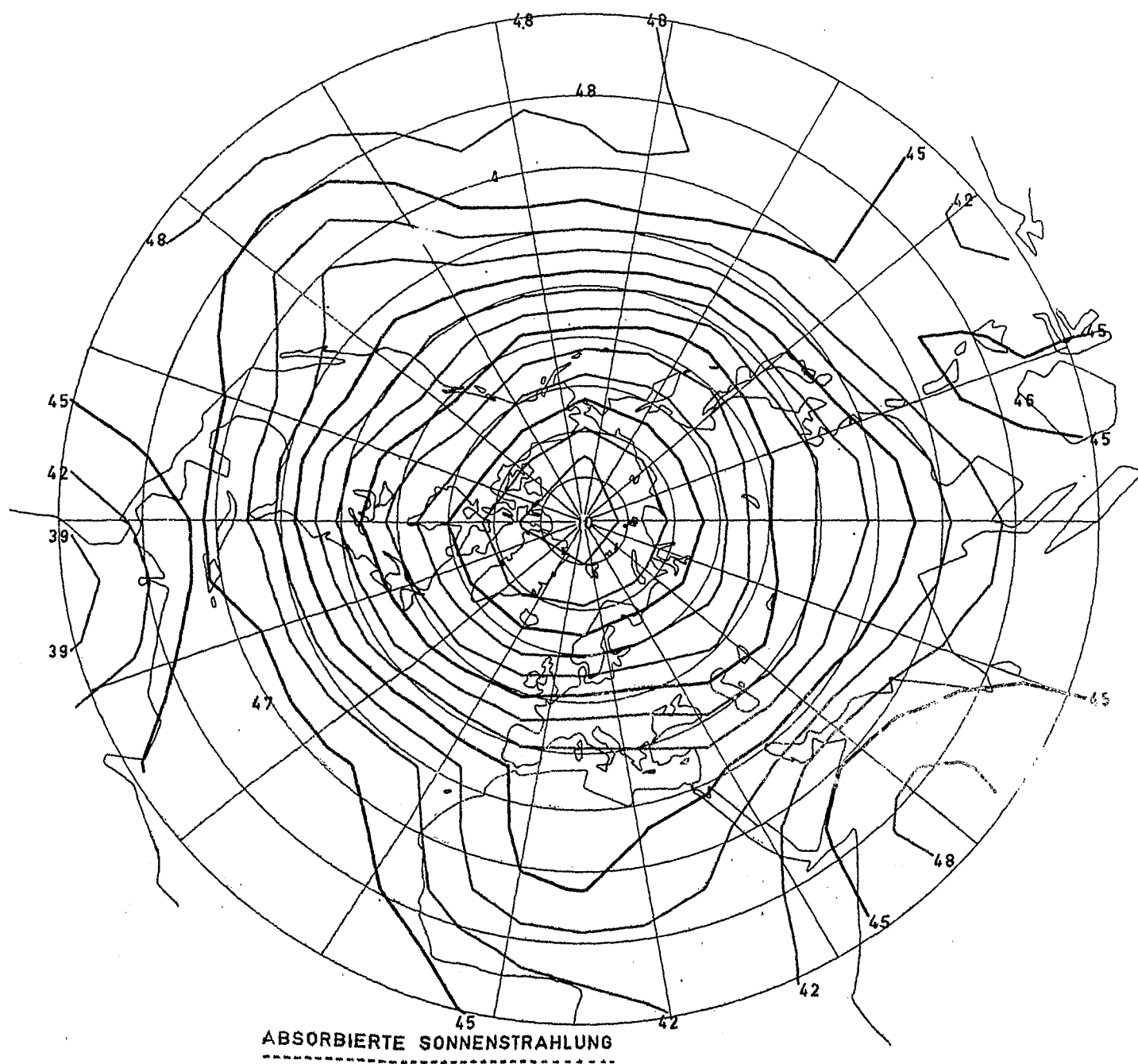


Abb. 28

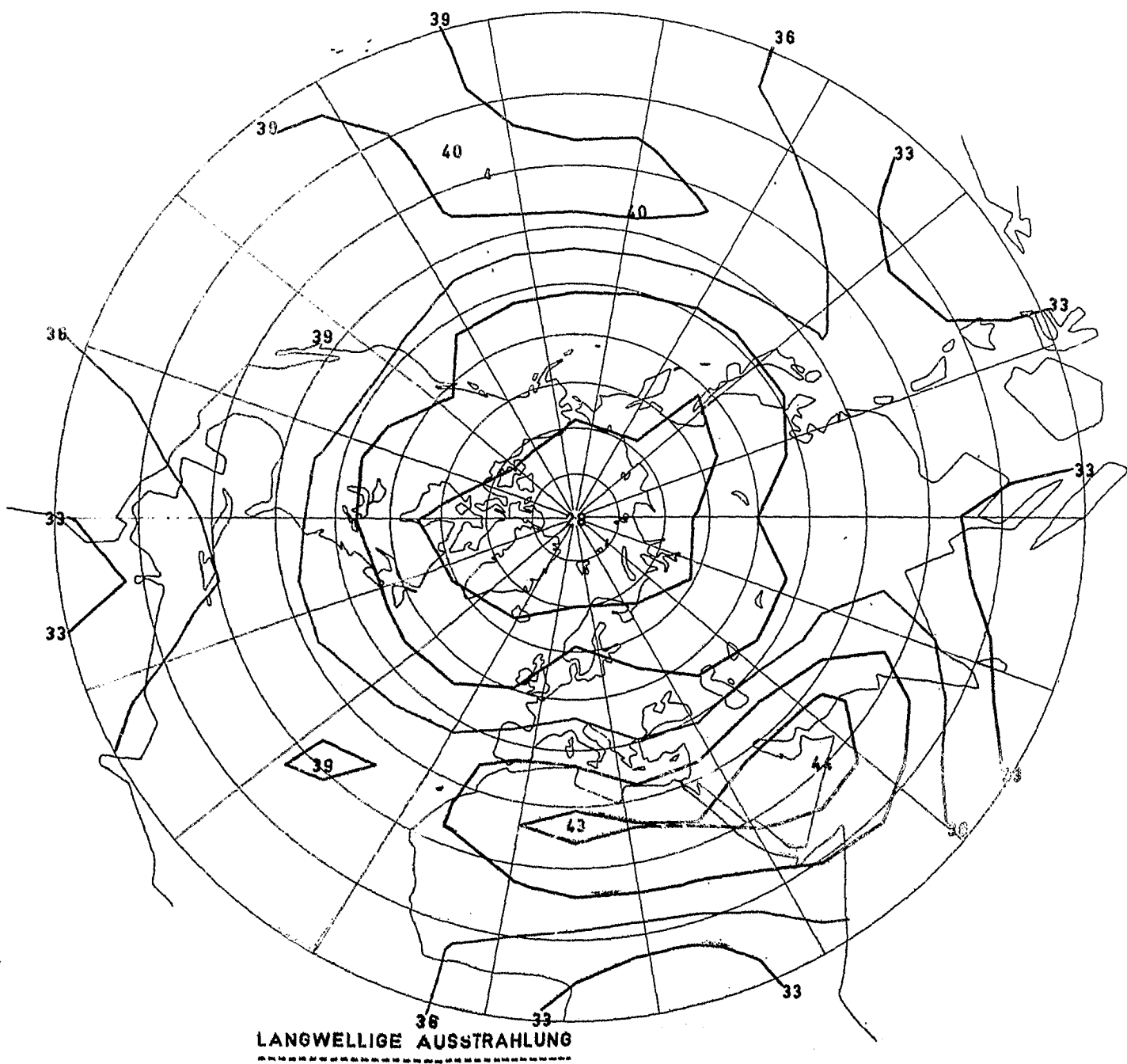


Abb. 29

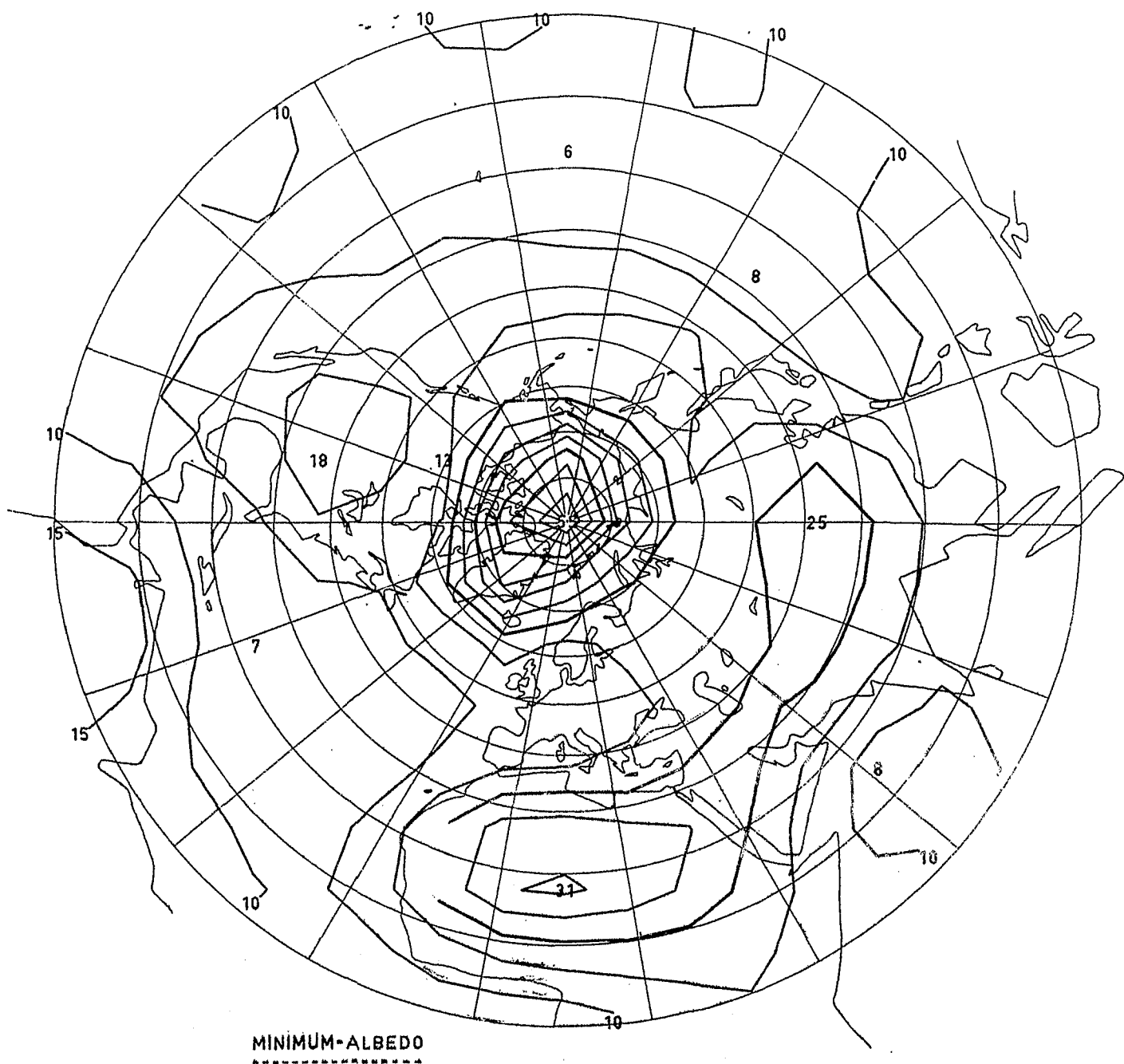
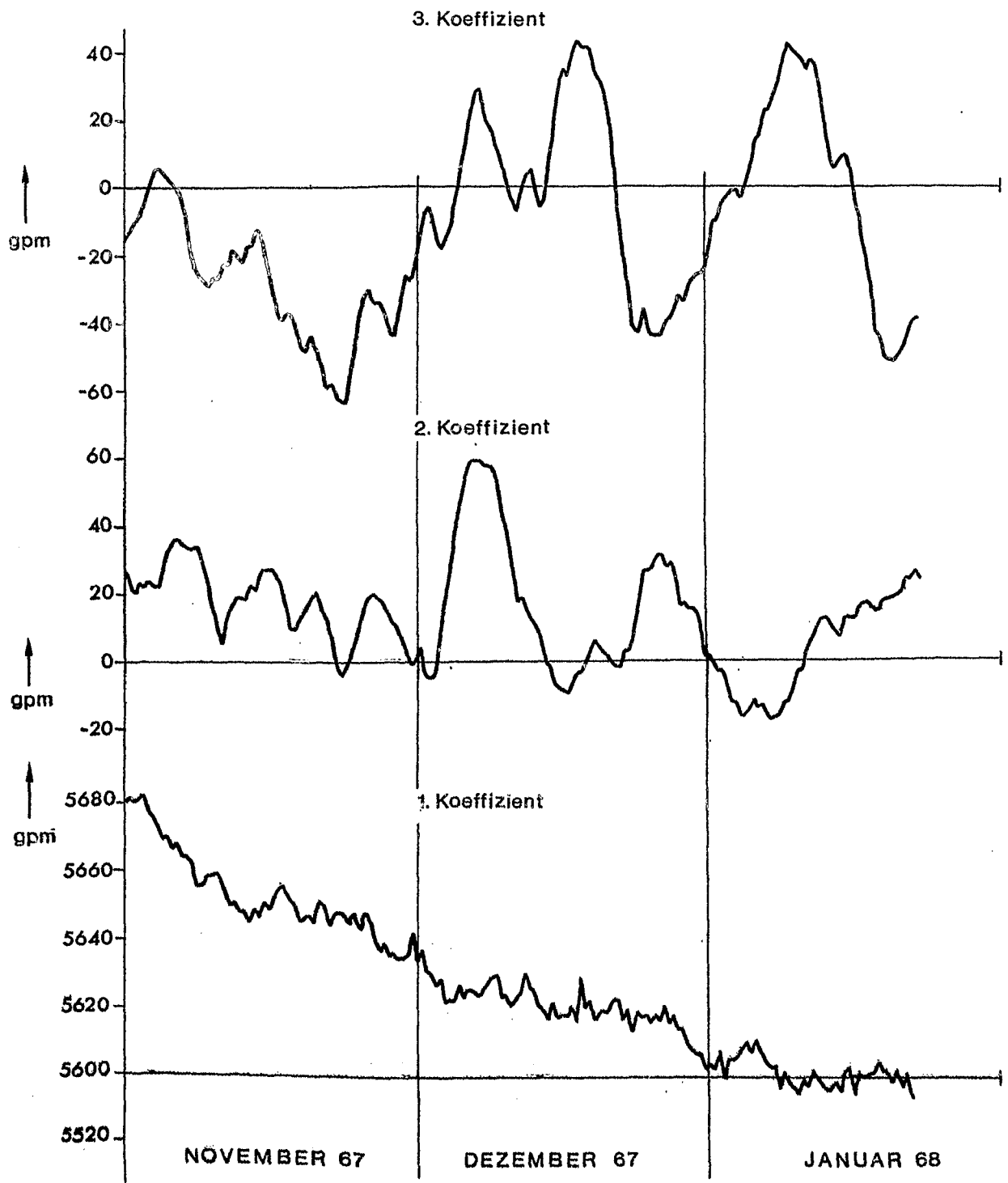
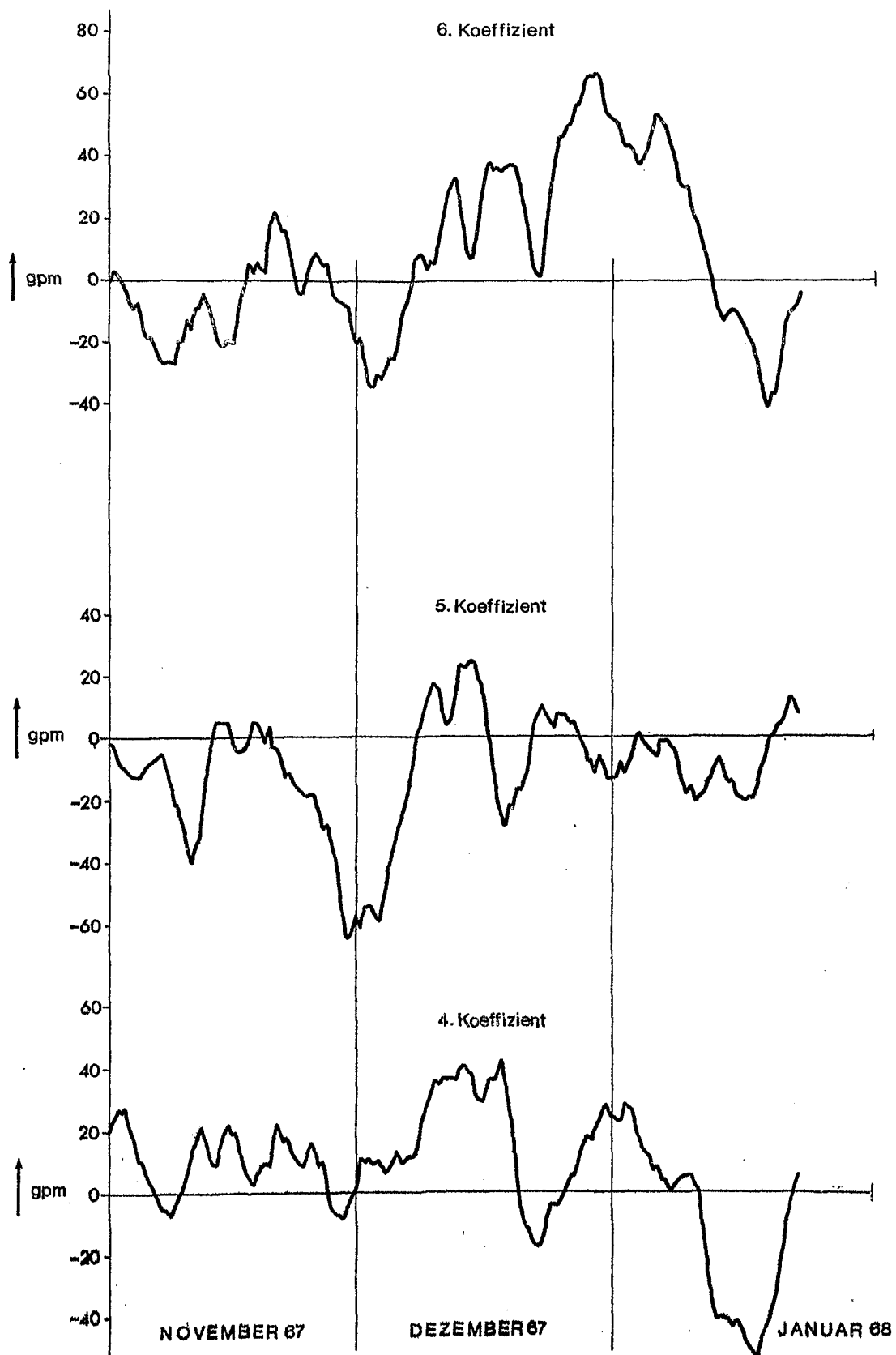


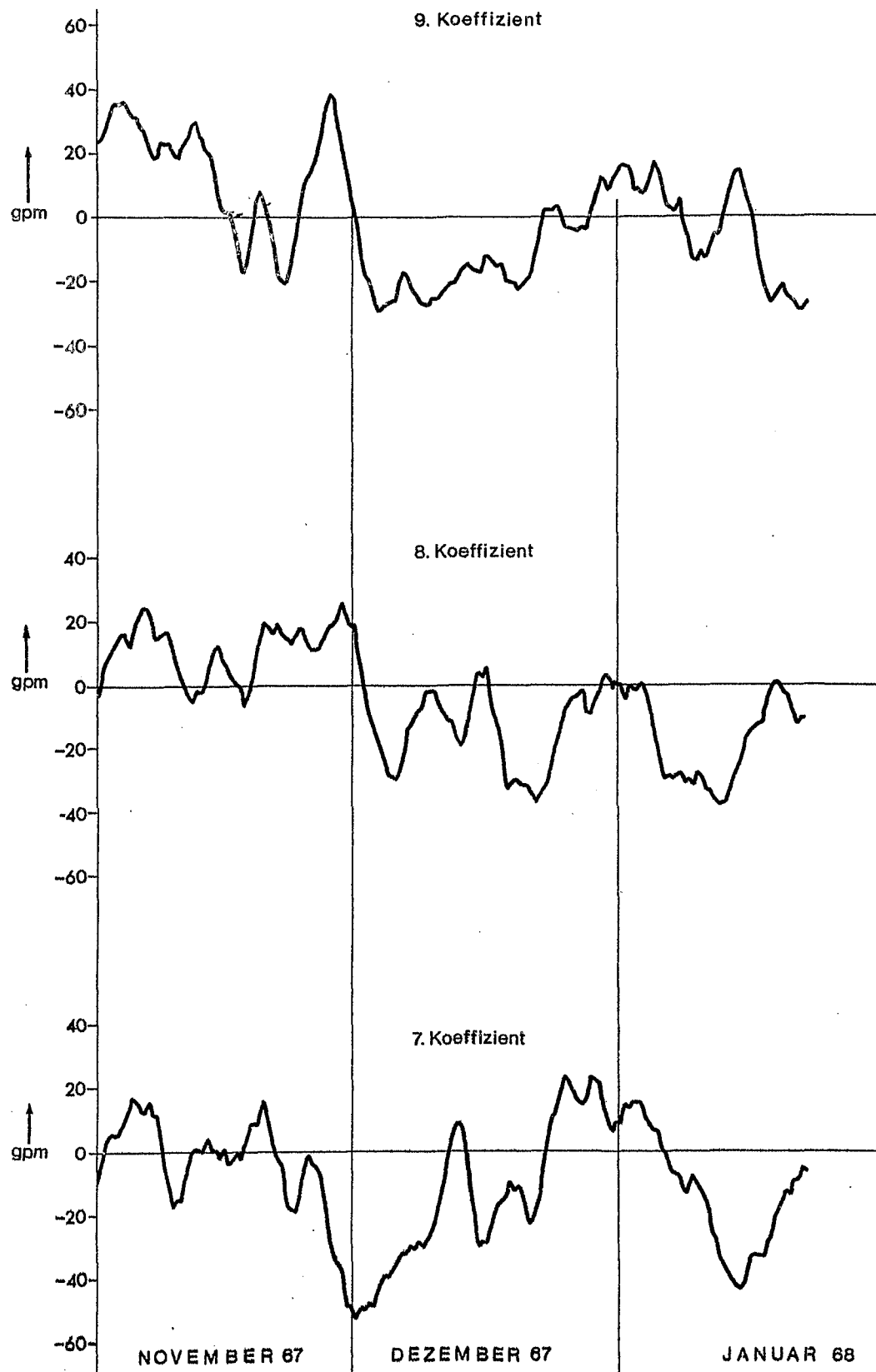
Abb. 30



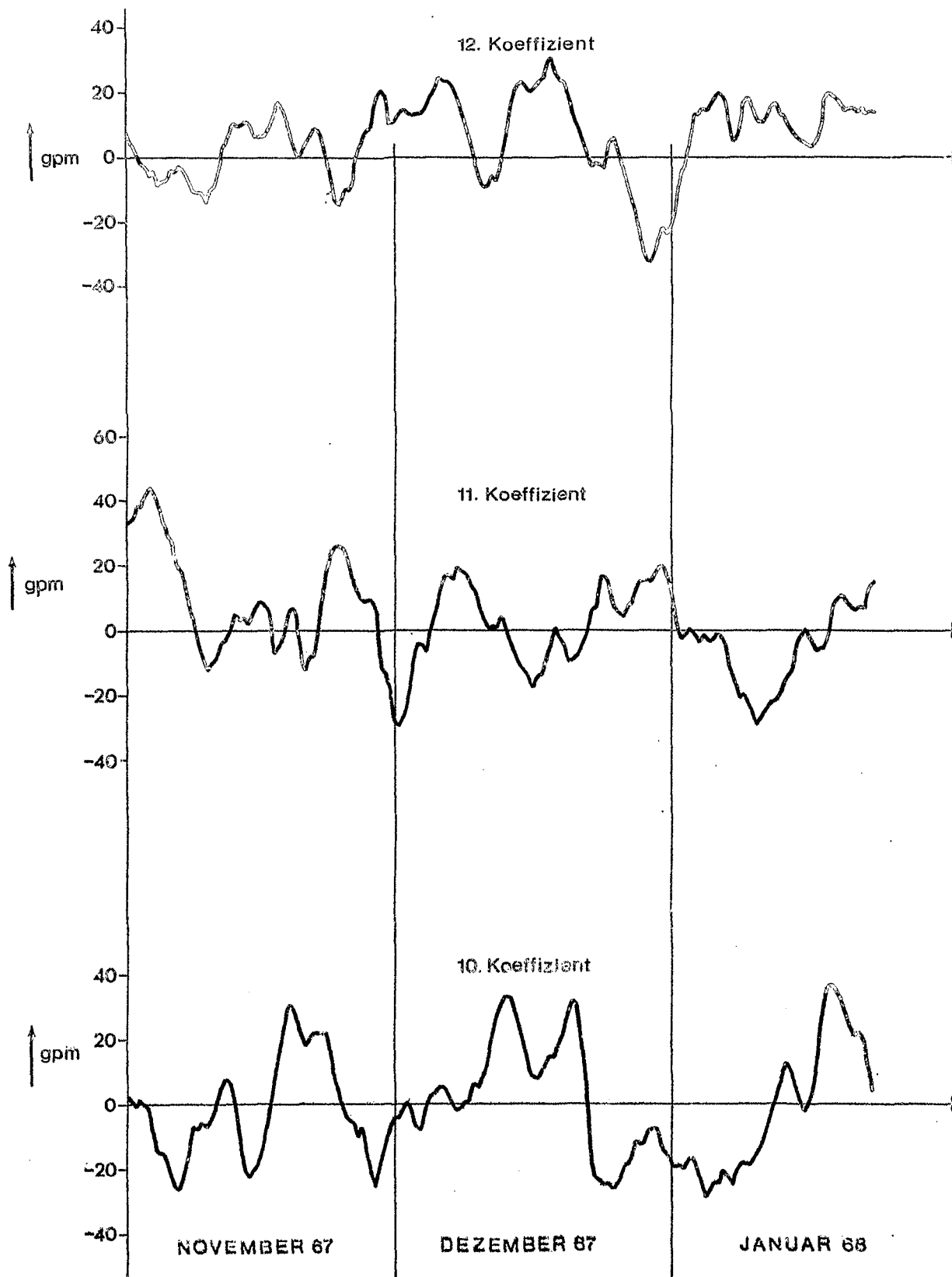
Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 1., 2. und 3. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500 mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)



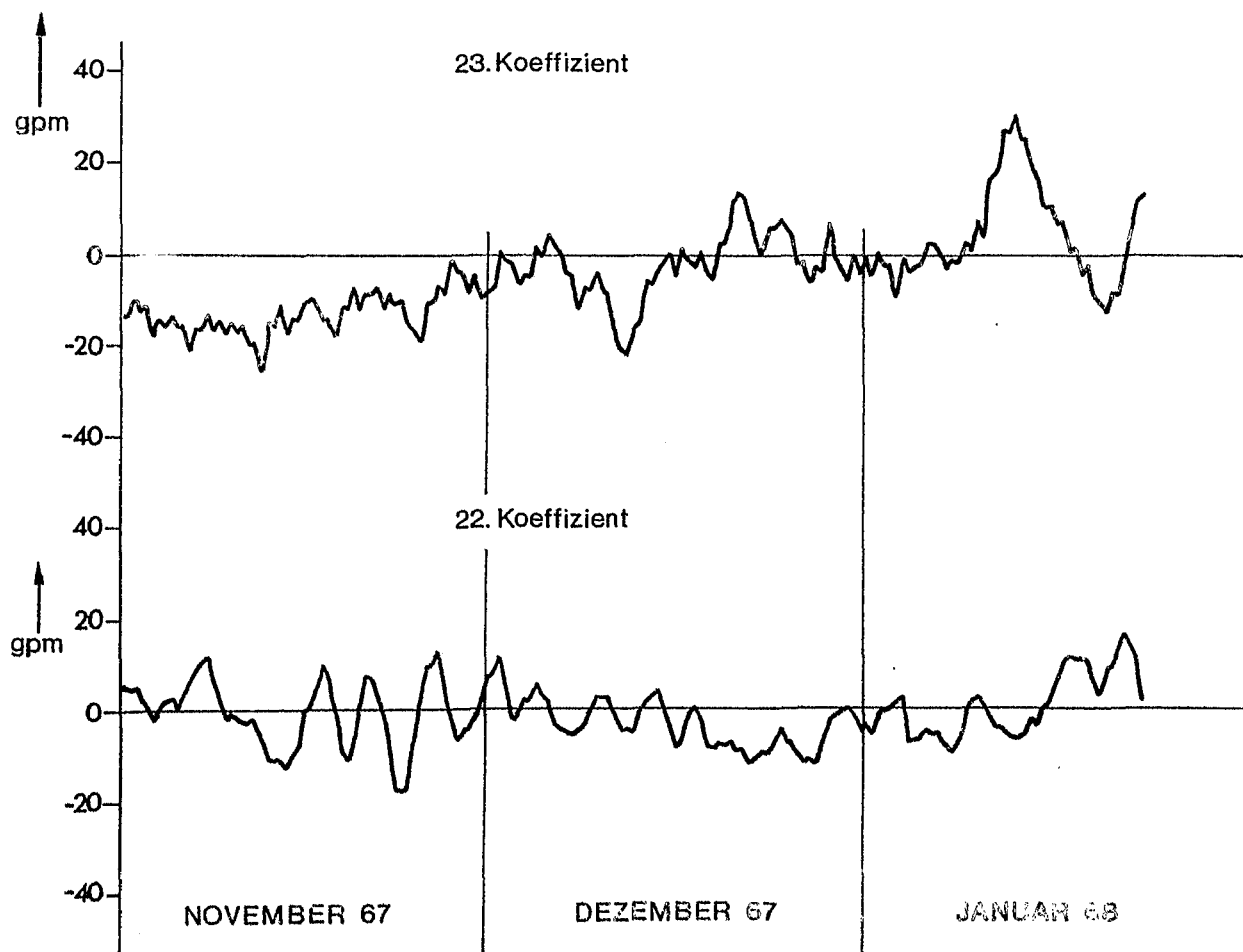
Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 4., 5. und 6. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)



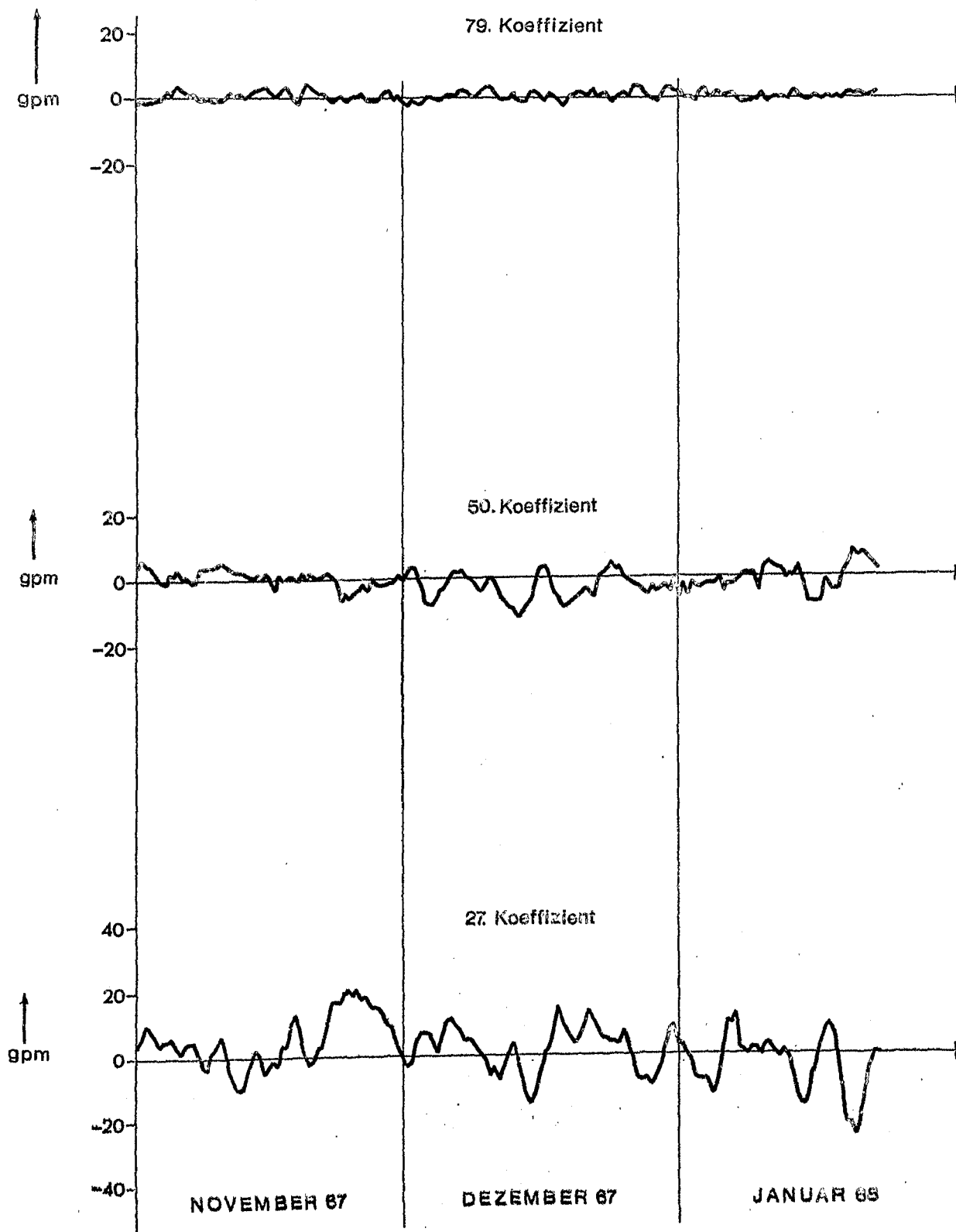
Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 7., 8. und 9. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500 mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)



Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 10., 11. und 12. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500 mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)



Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 22. und 23. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)



Die gewichteten Koeffizienten $w_i \cdot c_i(t)$ der 27., 50. und 79. natürlichen Orthogonalfunktion aus dem Geopotential in 500 mb der Nordhalbkugel im Winter (Dezember, Januar, Februar) als Funktion der Zeit (Nov. 67 bis Jan. 68)

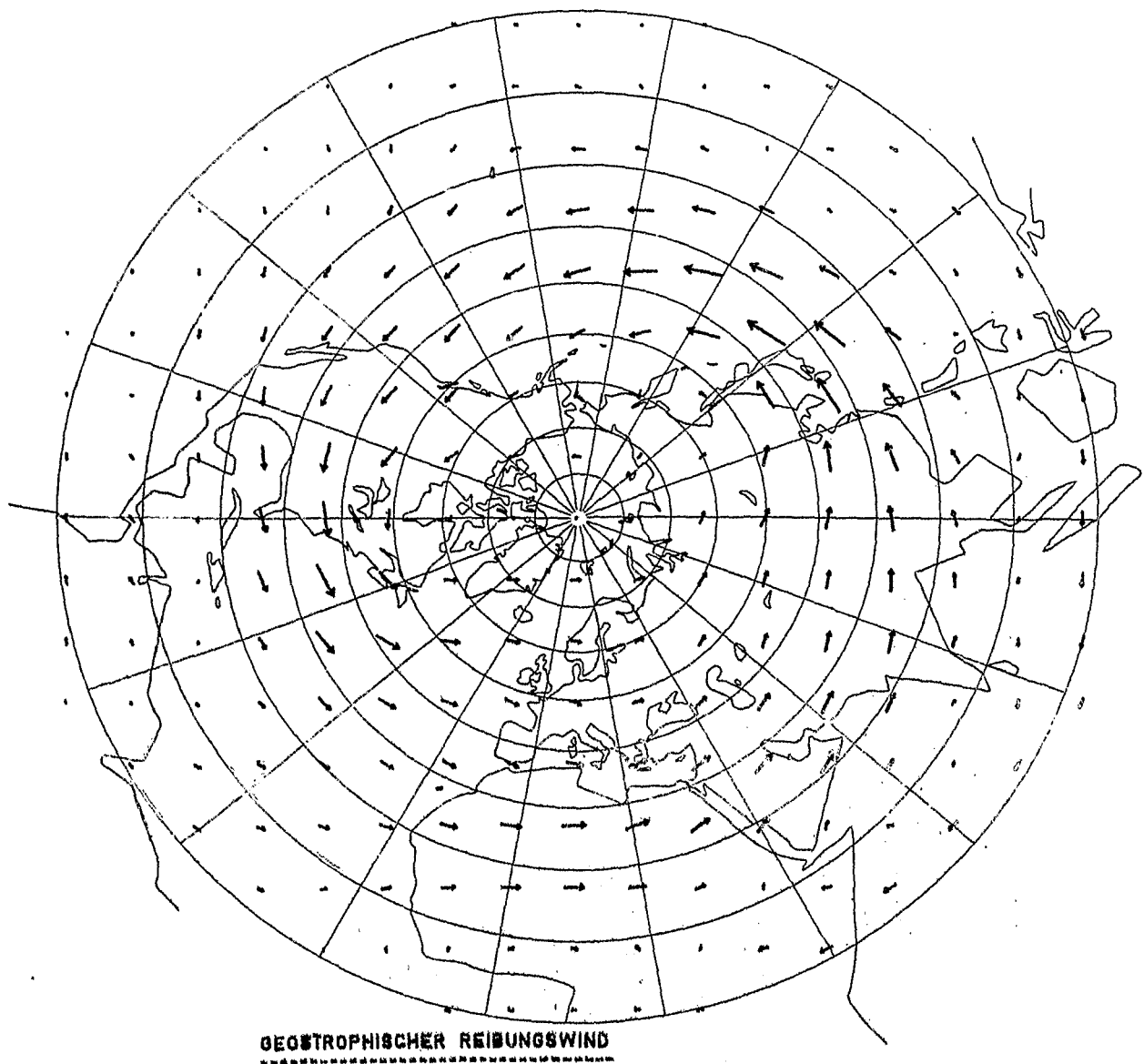


Abb. 37 in 500 mb
 im Winter (Dez., Jan., Febr.)
 berechnet
 aus der 1. natürlichen Orthogonalfunktion

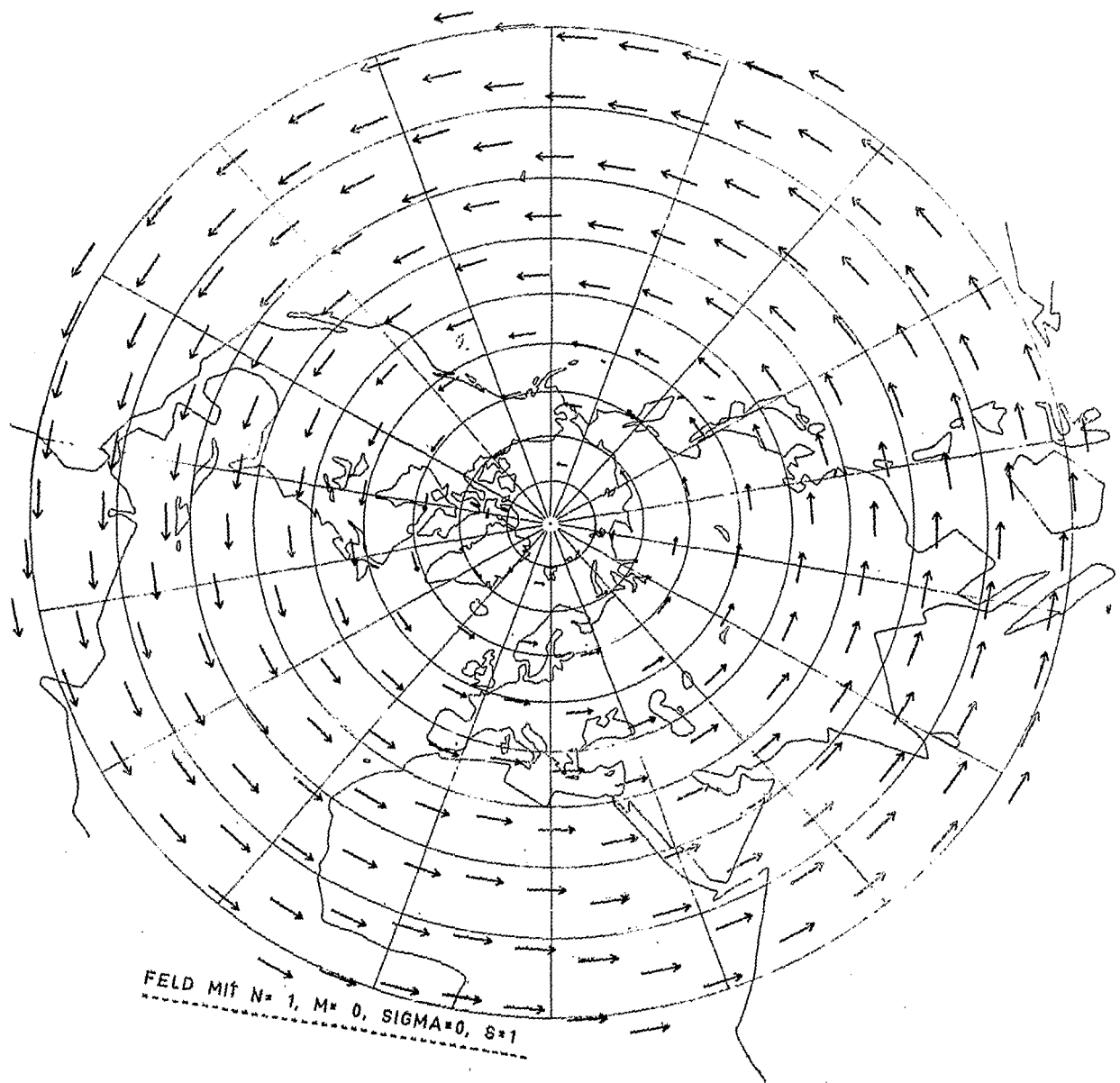


Abb. 38

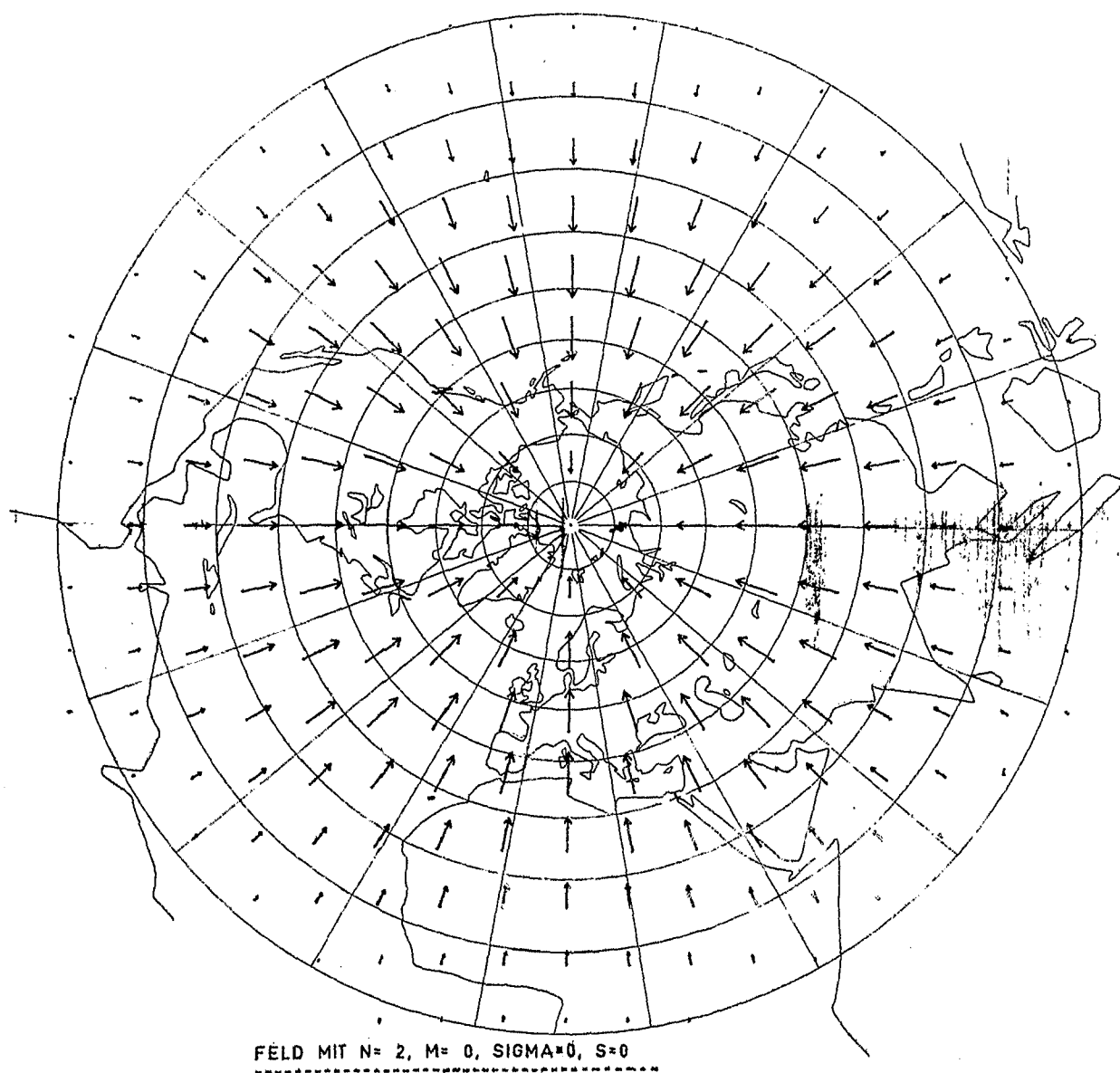


Abb. 39

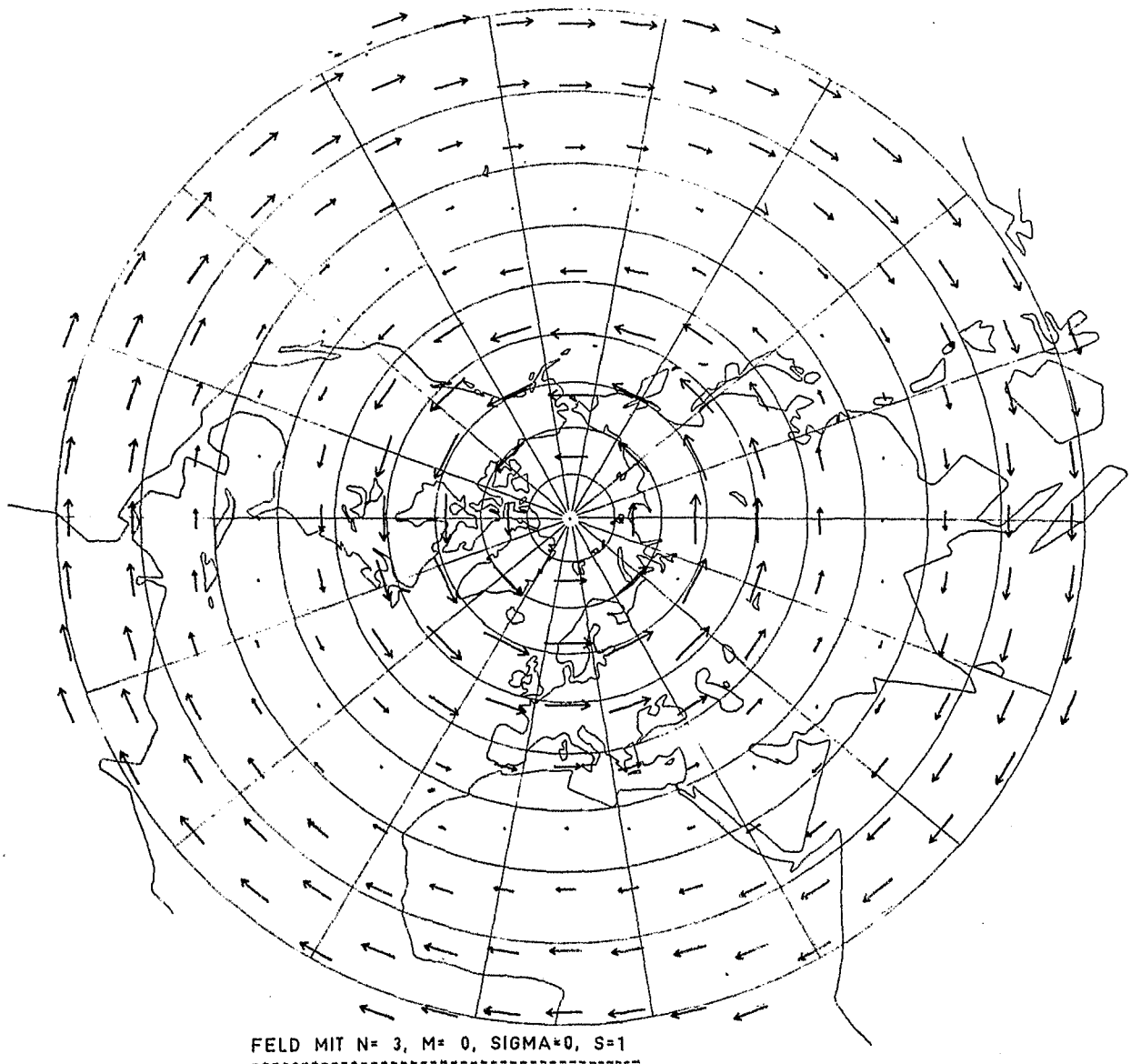


Abb. 40

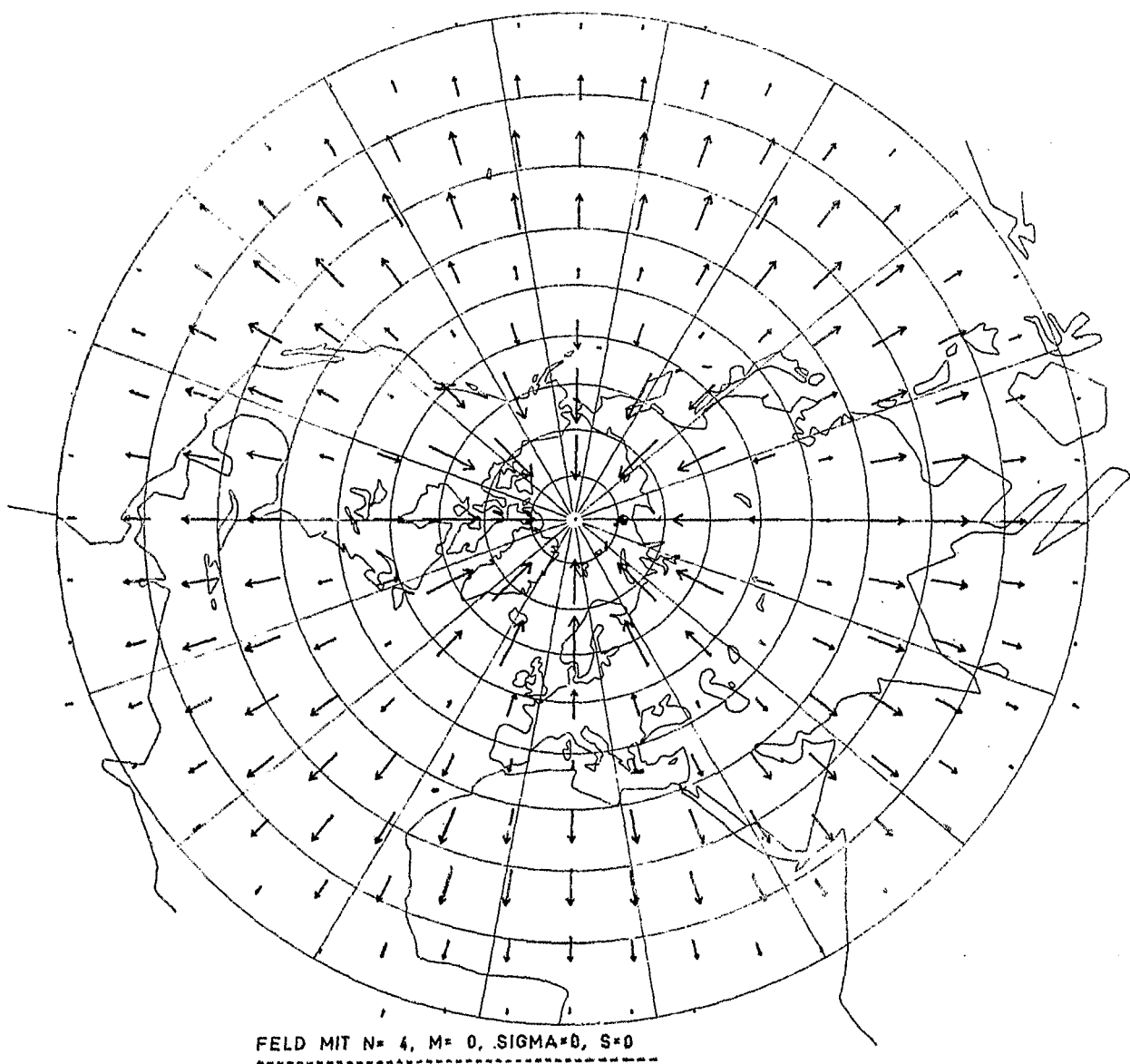


Abb. 41

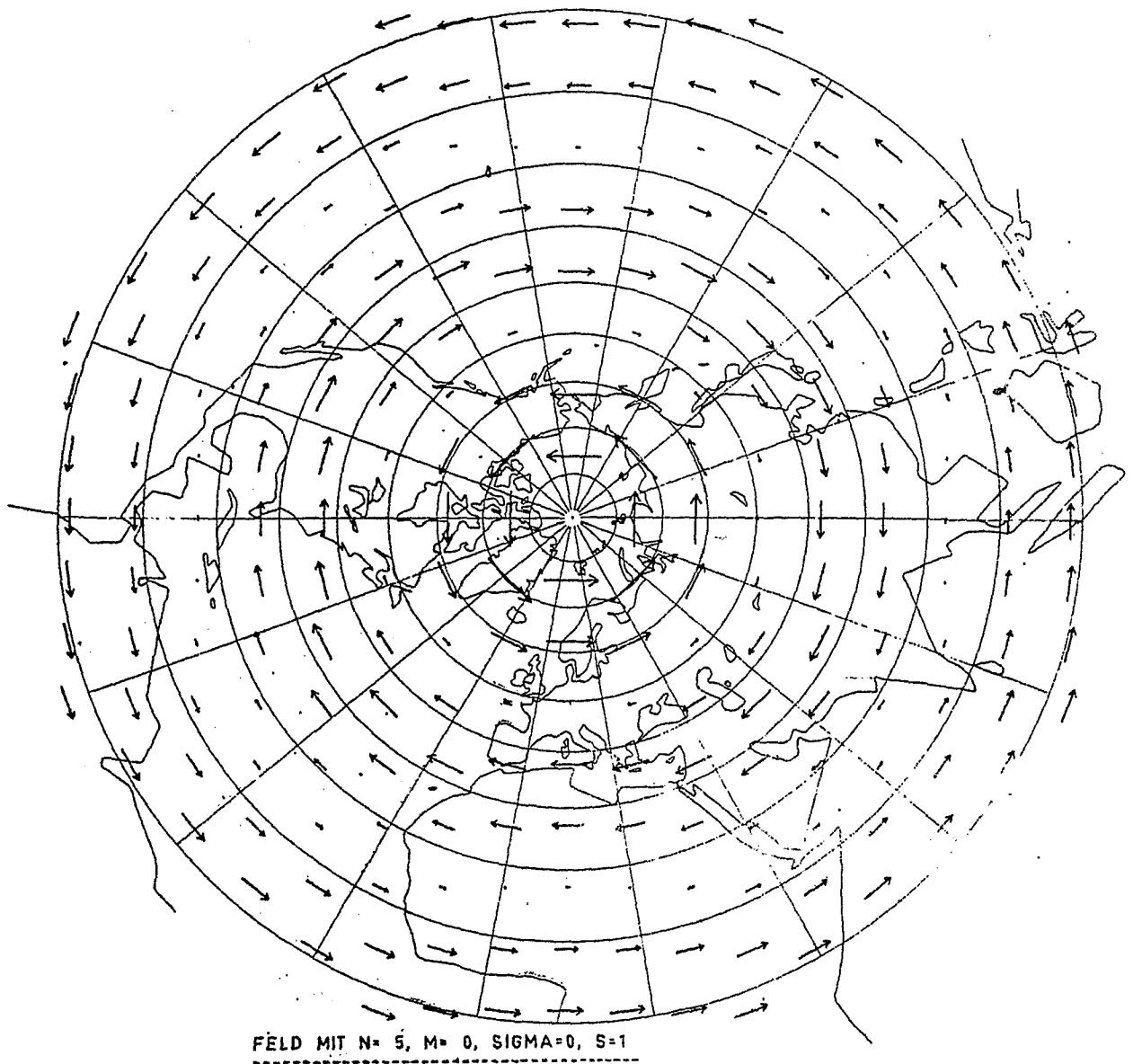


Abb. 42

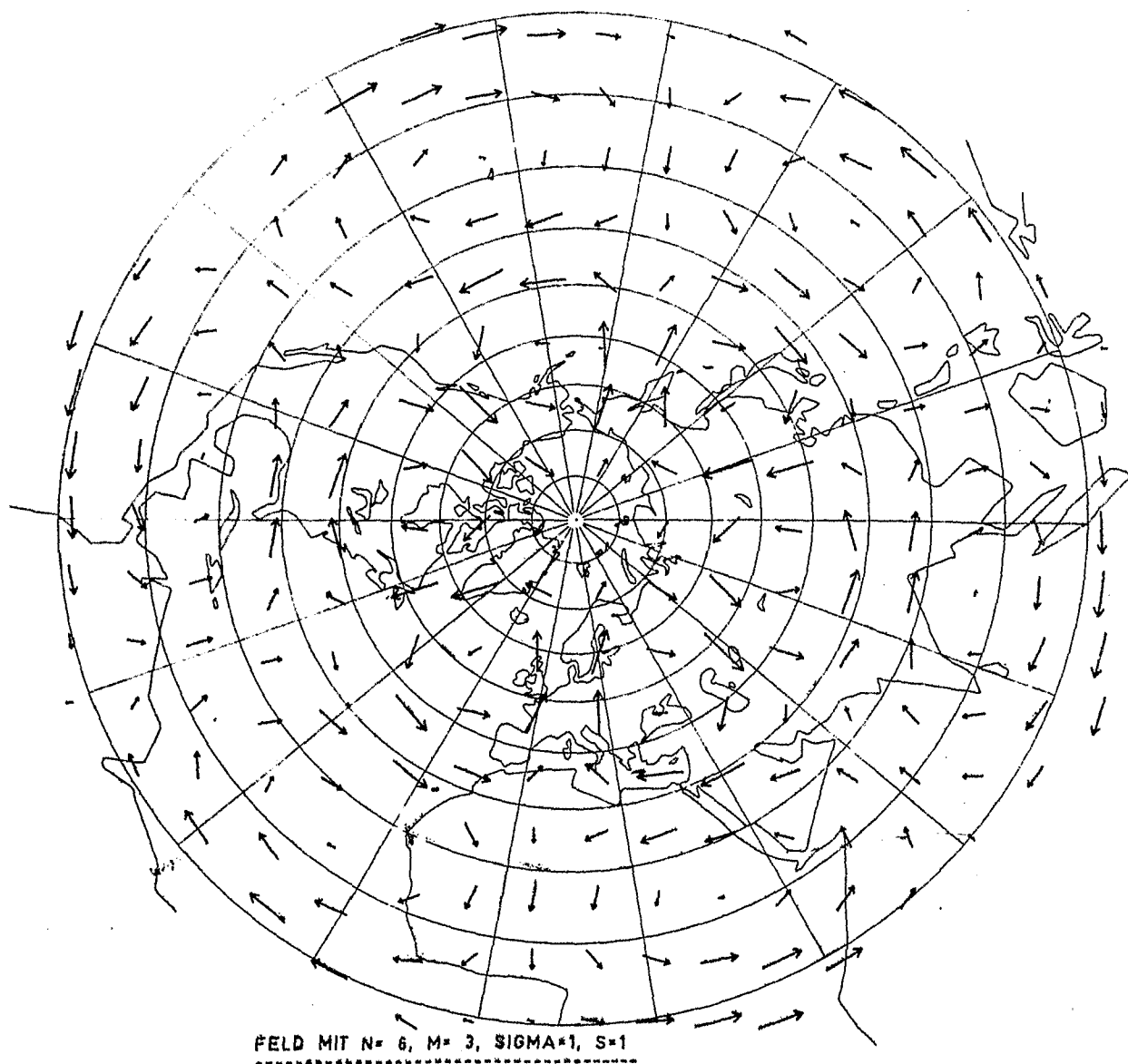


Abb. 43